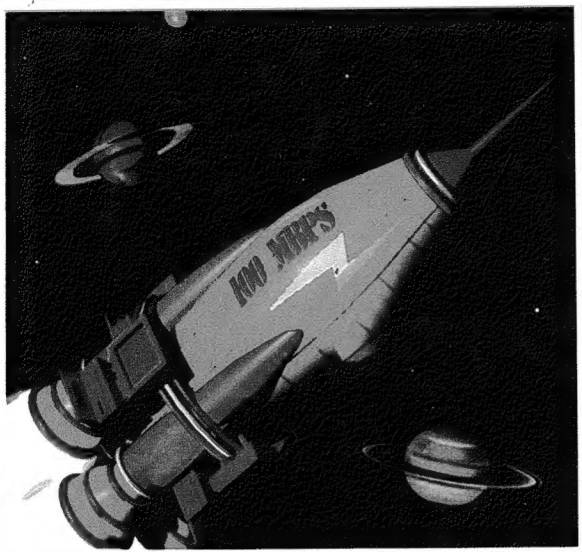


# علم الإحصاء الوصفي المبرمج



**Computerized Descriptive Statistics**

نص منصور  
عزام صبري  
د. علي قوقزه







﴿ وَقُلْ أَعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾

صدق الله العظيم

علم الاحصاء الوصفي المبرمج



# علم الاحصاء الوصفي المبرمج

تأليف

عزام صبري

أ.د. عوض منصور

د. علي قوقزة

الطبعة الاولى

١٩٩٩م - ١٤٢٠هـ

دار صفاء للنشر والتوزيع - عمان

رقم الابداع لدى دائرة المكتبة الوطنية 1998/10/1618

رقم التصنيف : 519.530285 عزام صيري

المؤلف ومن هو في حكمه : عوض منصور ، علي قوقزه ،

عنوان المصنف : علم الإحصاء الوصفي المبرمج

الموضوع الرئيسي : ١- العلوم الطبيعية

٢- الإحصاء الوصفي

بيانات النشر : عمان - دار صفاء للنشر والتوزيع

\* - تم اعداد بيانات الفهرسة الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية

حقوق الطبع محفوظة للناسر

Copyright ©  
All rights reserved

الطبعة الأولى

1999 م - 1420 هـ



دار صفاء للنشر والتوزيع

عمان - شارع السلط - مجمع الفحص التجاري - هاتف وفاكس ٤٦١٢١٩٠

ص.ب ٩٢٢٧٦٢ عمان - الاردن

DAR SAFA Publishing - Distriuting

Telefax: 4612190 P.O.Box: 922762 Amman - Jordan

طبع في مطابع الارز



## بين يدي الكتاب

الحمد لله والصلاة والسلام على خير الأنام ورسول البشرية محمد وعلى آله وصحبه اجمعين وبعد

من فضل الله ومته وكرمه ان يمن علينا باصدار سلسلة جديدة في الإحصاء والعلوم الرياضية المبرجة بلغة مختلفة من لغات الحاسوب بعد سلسلتنا في الحاسبات الالكترونية التي لاقت رواجاً وانتشاراً واسعاً في الجامعات والكليات والمعاهد في انحاء الوطن العربي .

ونأمل ان تتوالى أعداد هذه السلسلة كأختها لتقديم ما يحتاجه طلابنا في الجامعات والكليات من مفاهيم ومبادئ أساسية في الإحصاء والعلوم الرياضية المبرجة وحرصنا في هذا الكتاب على اغناء برامج الحاسبات لمعظم الطرق الإحصائية وكيفية الوصول إلى نتائج إحصائية من خلال استخدام الطالب للحاسوب كما أغنيا الكتاب بمزيد من الأمثلة والتمارين حتى تكون عوناً للطلاب لتبسيط المحتوى

ويكفي ان نذكر ان جميع الشعائر التعبدية في ديننا الحنيف مرتبطة ارتباطاً وثيقاً بالرياضيات والإحصاء بأعداد ركعاتها وفي التساييح ونظام الزكاة والحج وبعدد مرات الطواف والسعي بين الصفا والمروة .. الخ

وقبل الختام نود ان نشكر جميع الأخوة الذين ساهموا في اخراج هذا الكتاب إلى حيز الوجود هذا وإننا نأمل من الأخوة زملاء أن لا ييخلوا علينا في ابداء رأيهم

أو ملاحظاتهم القيمة حتى نستطيع العمل على تلافيها من خلال الطباعات القادمة  
وفي الختام نسأل الله أن يكون هذا الكتاب خالصا لوجه الله الكريم وأن يكون من  
العلم الذي يتنفع به

**المؤلفون**

**1998/9/20**



## المحتويات

5	..... مقدمة
---	-------------

### الفصل الأول

11	..... 1-1 : مقدمة
12	..... 2-1 : مصادر جمع البيانات
12	..... 1-2-1 : المصادر غير المباشرة (التاريخية)
13	..... 2-2-1 : المصادر المباشرة (الميدانية)
14	..... 3-1 : تصميم الاستمارة الإحصائية
15	..... 4-1 : طرق جمع البيانات او اساليب جمع البيانات
16	..... 5-1 : انواع العينات
21	..... 1-5-1 : مصادر الخطأ في العينات
24	..... 6-1 : تبويب وتصنيف البيانات
25	..... 7-1 : تفريغ البيانات الإحصائية
26	..... 1-7-1 : التوزيعات التكرارية
31	..... 2-7-1 : التوزيع التكراري المتجمع
34	..... 3-7-1 : الجداول المقفلة والمفتوحة
35	..... 4-7-1 : الجداول المنتظمة وغير المنتظمة
43	..... 8-1 : عرض البيانات
43	..... 1-8-1 : العرض الجدولي
45	..... 2-8-1 : العرض الهندسي للبيانات المنفصلة
51	..... 9-1 : تمثيل الجداول التكرارية
59	..... 10-1 : عرض البيانات
62	..... 11-1 : انواع المنحنيات
64	..... 12-1 : اشكال المنحنيات

### الفصل الثاني

#### مقاييس النزعة المركزية

81	..... 1-2 : مقدمة
81	..... 2-2 : الوسط الحسابي

82	..... 1-2-2: كيفية إيجاد الوسط الحسابي
91	..... 2-2-2: الوسط الحسابي المرجح
92	..... 3-2-2: خصائص الوسط الحسابي
95	..... 3-2: الوسيط
96	..... 1-3-2: كيفية إيجاد الوسيط
105	..... 2-3-2: خصائص الوسيط
108	..... 4-2: المتينات
108	..... 1-4-2: مفهوم المتين
108	..... 2-4-2: كيفية إيجاد المتينات
114	..... 3-4-2: الترتيب المتيني
125	..... 5-4-2: العشرات
130	..... 5-2: المتوال
130	..... 1-5-2: طرق إيجاد المتوال
134	..... 2-5-2: خصائص المتوال
135	..... 3-5-2: العلاقة الخطية بين الوسط الحسابي والوسيط والمتوال
140	..... 6-2: أثر التحويلات الخطية على مقاييس النزعة المركزية
141	..... 7-2: الوسط الهندسي
142	..... 8-2: الوسط التوافقي
144	..... 9-2: الوسط التريجي
152	..... 10-2: أمثلة متنوعة

### الفصل الثالث

#### مقاييس التشتت

159	..... 1-3: مقدمة
159	..... 2-3: مقاييس التشتت
159	..... 1-2-3: المدى
162	..... 2-2-3: نصف المدى الربيعي وطرق إيجاده
165	..... 3-3: الانحراف المتوسط
170	..... 4-3: التباين ومفهومه والانحراف المعياري
179	..... 5-3: أثر التحويلات الخطية على التباين والانحراف المعياري

180	6-3: العلاقة المعيارية وكيفية إيجادها
-----	---------------------------------------

## **الفصل الرابع** **العزوم والتفرطح**

263	1-4: الالتواء
270	2-4: التفرطح

## **الفصل الخامس** **التوزيع الطبيعي**

273	1-5: شكل المنحنى الطبيعي
273	2-5: خصائص التوزيع الطبيعي
274	3-5: جداول التوزيع الطبيعي للمساحات
276	4-5: تطبيق على المنحنى الطبيعي من خلال مسائل عملية

## **الفصل السادس** **الارتباط والانحدار**

291	1-6: طريقة جداول الانتشار
292	2-6: معامل الارتباط وخصائصه
293	3-6: طرق إيجاد معامل الارتباط
295	1-3-6: إيجاد معامل ارتباط بيرسون
297	2-3-6: إيجاد معامل الارتباط بطريقة الانحراف المعياري
297	3-3-6: إيجاد معامل ارتباط سيورمان للرتب
301	4-6: مفهوم الانحدار
307	5-6: امثلة اضافية
310	6-6: معامل الاقتران
312	7-6: معامل التوافق

## **الفصل السابع** **السلاسل الزمنية**

339	1-7: مفهوم السلسلة الزمنية
339	2-7: تحليل السلسلة الزمنية من خلال إيجاد المتوسطات المتحركة
341	3-7: طريقة المتوسطات المتحركة
346	4-7: مركبات السلسلة الزمنية

352	..... 5-7: مركبة الفصل أو المركبة الموسمية
-----	--

## الفصل الثامن الأرقام القياسية

357	..... 1-8: مقدمة
358	..... 2-8: استخدامات الأرقام القياسية
358	..... 3-8: خصائص سنة الأساس
358	..... 4-8: أنواع الأرقام القياسية
373	..... 5-8: اختبار الأرقام القياسية

## الفصل التاسع الاحصاءات الحيوية

381	..... 1-9: تعريف الاحصاء السكاني
381	..... 2-9: أهمية الاحصاء السكاني
382	..... 3-9: أنواع البيانات التي يتم حصرها
382	..... 4-9: التحرك السكاني
384	..... 5-9: الاحصاءات الحيوية
384	..... 6-9: مقاييس الخصوبة
386	..... 7-9: مقاييس النمو السكاني
387	..... 8-9: التقديرات السكانية وإيجادها بطريق نظام المتوالية العددية
388	..... 9-9: مقاييس الوفيات

## الفصل العاشر نظرية الاحتمالات

391	..... 1-10: مقدمة
394	..... 2-10: نظريات في الاحتمالات
397	..... 3-10: الفضاء العيني المنتظم
404	..... 4-10: الاحتمال الشرطي
406	..... 5-10: الاحداث المستقلة
407	..... 6-10: نظرية بيز

## الفصل الأول

### الطريقة الإحصائية

(1 - 1)

**مقدمة:** الطريقة الإحصائية تعتبر من أهم الطرق التي يقوم عليه مفهوم علم الإحصاء وقبل التعرف على مفهوم هذه الطريقة لابد من التعرف على بعض التعريفات التي تفيد في هذا المجال.

**تعريف:** علم الإحصاء علم يبحث في جمع البيانات وتنظيمها وتلخيصها وعرضها ثم تحليل البيانات من أجل الوصول إلى نتائج تفيد في اتخاذ القرارات عند ظهور حالات عدم التأكد.

ولاحقاً صنفه العلماء والمهتمين به إلى صنفين:

**تعريف:** علم الإحصاء الوصفي هو العلم الذي يساعد في تصنيف وتلخيص وعرض البيانات.

**تعريف:** علم الإحصاء التحليلي هو العلم الذي يختص في تحليل البيانات المجموعة والمخصصة بهدف الوصول إلى نتائج تفيد في اتخاذ القرارات عند ظهور حالة عدم التأكد.

**تعريف:** الطريقة الإحصائية هي مجموعة الطرق العلمية لجمع البيانات وتبويبها وعرضها ووصفها وتحليلها بهدف استخدام النتائج المنطقية عن الظاهرة قيد البحث.

وتعتمد الطريقة الإحصائية على عناصر أهمها:

أ) جمع البيانات : قبل أن نقوم بهذه العملية علينا مراعاة مايلي:

- 1) تحديد المعلومات المراد جمعها عن الظاهرة بدقة ووضوح.
- 2) التعرف على جميع المحاولات السابقة لدراسة الظاهرة أو الظواهر المشابهة لها حتى نتجنب الازدواجية في العمل ونتعرف على الصعوبات التي واجهت الباحثين ونقوم بتذليلها.
- 3) أن تكون التكلفة لجمع البيانات قليلة إلا في الحالات الإستثنائية.
- 4) أن تكون المعلومات صحيحة ودقيقة حتى تكون النتائج التي يتوصل إليها الباحث صحيحة.

## 1-2 مصادر جمع البيانات

يمكن الحصول على المعلومات من مصدرين:

1) المصادر غير المباشرة (التاريخية)

2) المصادر المباشرة (الميدانية)

### 1-2-1 المصادر غير المباشرة (التاريخية)

هي بيانات معدة مسبقا عن ظاهرة ما وباستطاعة الباحث الرجوع إليها وأخذ المعلومات المطلوبة مثل دائرة الإحصاءات العامة ودائرة الأحوال المدنية والوزارات والمؤسسات الخاصة والمؤسسات العامة والمصادر غير المباشرة تشمل الوثائق والمطبوعات والنشرات الإحصائية التي تصدرها الهيئات في البلاد المختلفة وكذلك الهيئات الدولية مثل هيئة الأمم المتحدة. وكمثال على المصادر التاريخية يمكن أخذ المعلومات عن حالات الوفيات والولادة والزواج والطلاق من سجلات دائرة الأحوال المدنية دون الرجوع إلى الوحدات الأصلية.

أما مميزات هذا المصدر للمعلومات أنه يوفر الوقت والجهد والمال أما عيوبه فمن المحتمل أن تكون البيانات غير دقيقة.

#### (2-2-1) المصادر المباشرة (الميدانية)

وهي الحصول على المعلومات من مصادرها الأصلية وذلك عن طريق الإتصال بمفردات المجتمع قيد البحث مباشرة من خلال توجيه الأسئلة إما عبر المقابلة الشخصية أو التفلون أو المراسلة وستكلم عن كل منها بإيجاز:

**\* المقابلة الشخصية:** ويتم هذه المقابلة بواسطة أشخاص مدربين على القيام بهذه الأعمال ويقوم الباحث المدرب بطرح أسئلة محددة ومعدة مسبقا على الشخص المقصود ويسجل الإجابة عن هذه الأسئلة.

ومن مميزات المقابلة الشخصية الحصول على معلومات دقيقة ويستطيع الباحث الذي يقوم بطرح الأسئلة توضيح أي غموض أو التباس قد تكون موجودة في الأسئلة. وأما عيوبها فهي التكلفة العالية والتحيز الناتج عن تأثير جامع البيانات على الشخص المبحوث سواء كان بقصد أم بغير قصد.

**\*\* التلّفون:** ويستخدم كوسيلة أيضا مباشرة وهو غير مكلف لكنه غير متوفر لدى الجميع مما يجعل عملية جمع البيانات مقتصرة على من يملكونه وهو هي أهم عيوب هذه الطريقة.

**\*\*\* المراسلة:** ويتم جمع المعلومات عن طريق إرسال استمارة إحصائية إلى الشخص المبحوث عبر البريد، ومن مميزاتها التكلفة القليلة ولكن يعاب عليها احتمال عدم رد الاستمارة إلى الجهة المصدرة لها.

ويقوم الباحث بجمع البيانات على استمارة إحصائية، والاستمارة الإحصائية عبارة عن صحيفة يوجد بها أسئلة وبجانب كل سؤال يوجد فراغ حتى يستطيع الباحث أو المجيب من وضع الإجابة بجانب السؤال وقد قسم الإحصائيون

الاستمارات الإحصائية حسب طريقة تعبئة الاستمارة إلى نوعين:

- (1) كشف البحث: وهو الكشف الذي يقوم الباحث بتعبئته بنفسه
- (2) صحيفة الاستبيان: وهي التي يقوم الشخص المبحوث بملئها وتسلم إليه إما باليد أو عن طريق البريد ويرفق معها شرح للأسئلة الموجودة بها وكذلك مغلف ملصق عليه الطوابيع حتى يشجع الشخص المبحوث على إرجاع صحيفة الاستبيان إلى الجهة المصدرة، ويعاب عليها عدم تجاوب بعض المبحوثين واقتصارها على الأشخاص الملمين بالقراءة والكتابة.

### 1-3) تصميم الاستمارة الاحصائية

عند تصميم الاستمارة الاحصائية يجب ان نأخذ بالحسبان الإعتبارات التالية:--

- أ) على الباحث أن يؤكد وفي مكان بارز في استمارة على سرية المعلومات وبأن هذه المعلومات لايمكن استخدامها إلا لأغراض احصائية.
- ب) أن تحتوي الاستمارة على أقل عدد ممكن من الأسئلة لأن كثرة الأسئلة تؤدي إلى ملل الشخص المبحوث مما يدفعه إلى إعطاء معلومات غير دقيقة وبالإضافة إلى ذلك يجب أن يكون عدد الأسئلة كافيا لجمع المعلومات المطلوبة.
- ج) يجب أن لاتتطلب الأسئلة عمليات حسابية معقدة أو تحتاج إلى تفكير عميق أو الاعتماد على الذاكرة.
- د) يجب أن تكون الأسئلة سهلة وواضحة ويراعى فيها التسلسل المنطقي ويفضل أن تكون الإجابة عليها بكلمة واحدة مثل (نعم) أو (لا) أو الإجابة ذات الاختيار المتعدد.
- هـ) يجب أن نتجنب الأسئلة التي توحى بإجابات معينة كالسؤال الإنكاري الذي يدفع المبحوث إلى إعطاء إجابة متحيزة.



و) إعطاء شرح كافي لجميع التعاريف والإصطلاحات والوحدات المستخدمة في القياس في الاستمارة والأمثلة على ذلك كثيرة منها (الناتج القومي) أو (الدخل القومي) والوحدات النقدية مثل (الدينار)، (الدولار) الخ.

بالاضافة الى الاعتبارات السابقة يجب ان نقوم بتجربة الاستمارة والتعرف على مدى صلاحيتها واكتشاف الثغرات الموجودة بها والقيام باصلاحها.

#### 1-4) طرق جمع البيانات أو أساليب جمع البيانات

لعل اهم نقطة للباحث الاحصائي هو كيفية الحصول على البيانات الاحصائية وامامه طريقتان:

أ) المسح الشامل: وذلك بأخذ المعلومات عن جميع مفردات المجتمع قيد الدراسة لدراستها وهي افضل الطرق حيث تعطي نتائج دقيقة ومفصلة الا ان هناك صعوبات كالفحص المدمر لبعض المجتمعات او التي لايمكن حصرها كدراسة ملوحة مياه المحيطات التي تحول دون استخدام هذه الطريقة لذا نلجأ إلى طريقة أخرى وهي العينة.

ب) العينة: وهي طريقة تعطي معلومات ونتائج أقل دقة من الأولى حيث أن هناك بعض الأخطاء التي يمكن الوقوع بها وتؤثر على النتائج المعطاة ومنا أخطاء الصدفة أو التحيز. ألا انها اقل تكلفة وجهدا وتوفر كثيرا من الوقت

تعريف: العينة جزء من مجتمع الظاهر قيد الدراسة تؤخذ بطريقة معينة بحيث تكون ممثلة تمثيلا صحيحا للمجتمع بقصد التعرف على خصائص هذا المجتمع.

#### الاعتبارات التي تدعو إلى استخدام العينات

- توفير الوقت والجهد والنفقات.

- في بعض الاحيان يكون المجتمع المدروس غير محدود ومثال على ذلك كما سبق وأن ذكرنا دراسة ملوحة مياه احدى المحيطات حيث تضطر في هذه الحالة إلى استخدام العينة.

- في بعض الأحيان يؤدي فحص المفردات إلى تدميرها. فالقيام بالمسح الشامل لدم مريض يعني سحب كل دم المريض بغرض تحليله مما يؤدي إلى قتل المريض وفي هذه الحالة لابد من أخذ عينة من دم المريض وفحصها.

### 1-5) أنواع العينات

ويوجد نوعان من العينات:

1) العينات العمدية أو الغرضية: ويتم سحبها بطريقة ليست عشوائية وحسب غرض الباحث وتستخدم في الحالات التي يراد منها الحصول على تقديرات تقريبية لتكوين فكرة سريعة عن مشكلة معينة أو لاختبار الاستمارة الاحصائية للتأكد من صلاحيتها.

2) العينات العشوائية: يعني الاختيار العشوائي وإتاحة الفرصة امام جميع مفردات المجتمع للظهور في العينة وسنقوم بشرح العينات العشوائية التالية.

أ) العينة العشوائية البسيطة: يتم هذا الاختيار في حالتين:

1) في المجتمعات الصغيرة: أي المجتمعات التي عدد مفرداتها (25) مفردة فأقل في هذه الحالة يتم ترقيم المفردات من 1،2،.....،(25) وتكتب على بطاقات وحين يطلب عينة ذات حجم (5) مفردات تمسحب بطريقة عشوائية دون ارجاع حتى لا تظهر المفردة مكررة.

2) في المجتمعات الكبيرة: أي المجتمعات التي يزيد عدد مفرداتها عن (25) مفردة فنستخدم جدول الأرقام العشوائية واليك المثال التالي موضحا في الخطوات المتبعة لاستخدام هذه الجداول.

مثال: مجتمع حجمه 5000 مفردة يُراد سحب عينة حجمها 50 مفردة من هذا المجتمع كيف يتم ذلك مستعينا بجدول الأرقام العشوائية؛  
الحل: للاجابة على هذا السؤال تتبع الخطوات التالية:-

(1) نرقم مفردات المجتمع من 1 الى 5000 بالشكل التالي 1،....، 2،....، .....، 4999، 5000.

(2) بما ان حجم المجتمع ذو اربع منازل لذا لا بد من التأكد أن جدول الأرقام العشوائية مكون من اربعة منازل وفي حالة توفر جدول ذي خمس منازل فأننا نحذف خانة الآحاد من هذا الجدول.

(3) نبدأ بقراءة الأرقام من جدول الأرقام العشوائية مبتدئين من أقصى اليمين ومن أعلى العمود الأول. آخذين الأرقام التي تقل عن 5000 وغير المتكررة.

(4) نتابع هذه العملية بشكل متسلسل وكلما انتهينا من عمود نبدأ من أعلى العمود المجاور حتى نحصل على حجم العينة المطلوبة واذا انتهى الجدول ولم نحصل على حجم العينة المطلوبة، فأننا نقوم بحذف خانة العشرات ونكرر العملية السابقة مرة أخرى حتى نحصل على الحجم المطلوب، واذا لم نحصل على الحجم المطلوب نقوم بحذف خانة المئات وهكذا حتى نحصل على الحجم المطلوب واليك بعض هذه الأرقام الواردة في العينة. 73، 311، 487، 1453، ...

وفيما يلي نقدم نموذجاً لجدول الأرقام العشوائية

22341	21144	13410	63421	39432
27560	48715	43222	89632	31562
33224	14530	44444	67562	21433
37624	86231	40577	38432	22560

20430	32312	42633	47536	67311
30013	11462	47554	43231	68416
42321	12310	56773	59560	97318
62530	14562	47554	60110	73266

### ب- العينة العشوائية المنتظمة :

لاختيار العينة العشوائية المنتظمة نقوم باتباع الخطوات التالية:

- نرقم مفردات المجتمع من 1- حجم المجتمع قيد الدراسة

- نختار عشوائيا مفردة البداية للعينة من الأرقام 1-9

- نحدد مقدار الزيادة المنتظمة من العلاقة.

$$\text{الزيادة المنتظمة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}}$$

- نضيف مقدار الزيادة المنتظمة على مفردة البداية لنحصل على المفردة التالية المختارة في العينة ونتابع اضافة الزيادة المنتظمة بالتتابع إلى ان نحصل على مفردات العينة المطلوبة.

مثال: يراد اختيار عينة حجمها 200 مفردة من مجتمع حجمه 4000 مفردة كيف يتم ذلك بطريقة العينة العشوائية المنتظمة؟

الحل: نتبع الخطوات التالية:

(1) نختار مفردة البداية عشوائيا ولتكن المفردة رقم 8 هي المفردة المختارة

(2) نحدد مقدار الزيادة المنتظمة من العلاقة:

$$\text{مقدار الزيادة المنتظمة} = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} - \frac{400}{20} = 20$$

(3) نبدأ بكتابة أرقام العينة بحيث نضيف مقدار الزيادة على مفردة البداية وما تبعها من مفردات.

8، 28، 48، 68، 88، 108، 128، .....، 388

(ج) **العينة الطبقية:** - نستخدم هذا النوع عندما يكون المجتمع مقسم إلى طبقات ولاختيار عينة بهذه الطريقة تتبع الخطوات التالية:-

- نحدد حجم المجتمع الكبير وليكن (ن)
- نحدد حجم كل طبقة وليكن  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_r$
- بحيث ان:  $n_1 + n_2 + \dots + n_r = N$
- نحدد حجم العينة الكلي وليكن م.
- نحدد حجم العينة الطبقية وليكن  $m_1, m_2, m_3, \dots, m_r$
- نجد  $m_1, m_2, \dots, m_r$  من العلاقة التالية:

$$m_1 = \frac{n_1}{N} \times M$$

$$m_2 = \frac{n_2}{N} \times M$$

⋮

$$m_r = \frac{n_r}{N} \times M$$

مثال: مجتمع 10000 مفردة مكن من 4 طبقات حجم كل طبقة على التوالي،  
1000، 3500، 4000، 1500، يراد سحب عينة حجمها 400 مفردة من  
هذا المجتمع كيف يتم ذلك بحيث تمثل هذه العينة المجتمع تمثيلاً سليماً؟

الحل: من المعطيات ن-10000، ن<sub>1</sub>-1000، ن<sub>2</sub>-3500  
ن<sub>3</sub>-4000، ن<sub>4</sub>-1500، م-400

ثم نبدأ بتحديد حجم كل عينة جزئية باستخدام العلاقة اعلاه

$$1^{\circ} \quad \frac{1000}{10000} \times م = \frac{400 \times 1000}{10000} = 40$$

$$2^{\circ} \quad \frac{3500}{10000} \times م = \frac{400 \times 3500}{10000} = 140$$

$$3^{\circ} \quad \frac{4000}{10000} \times م = \frac{400 \times 4000}{10000} = 160$$

$$4^{\circ} \quad \frac{1500}{10000} \times م = \frac{400 \times 1500}{10000} = 60$$

$$م = 40 + 140 + 160 + 60 = 400$$

د- العينة متعددة المراحل: عندما يتعذر استخدام الطرق السالفة الذكر لاختيار عينة  
بمجمع ما فأننا نلجأ لأسلوب العينة متعددة المراحل وستقوم  
بتوضيح هذه الطريقة من خلال المثال التالي:-

مثال: يراد قياس المستوى التحصيلي في كلية مجتمع بطريقة العينة متعددة المراحل  
كيف يتم ذلك؟

الحل: من المعلوم ان الكلية تشمل على عدة تخصصات، نقوم باختيار تخصص ما عشوائياً كمرحلة اولى.

- كل تخصص به عدة شعب، نقوم باختيار احدى هذه الشعب عشوائيا. وهذه هي المرحلة الثانية.

- نختار عينة حسب الحجم المطلوب عشوائيا من هذه الشعبة وهي المرحلة الثالثة.

### 1-5) مصادر الخطأ في العينات

نلاحظ أن النتائج التي نحصل عليها من العينة لا تكون مطابقة تماما للنتائج التي نحصل عليها من المسح الشامل، والسبب في ذلك ان نتائج العينة تتعرض لنوعين من الاخطاء.

أ) خطأ الصدفة      ب) خطأ التحيز

#### أ) خطأ الصدفة (الخطأ العشوائي)

يرجع سبب هذا الخطأ إلى طريقة الاختيار العشوائي لمفردات العينة فتأتي العينة مختلفة عن نتائج مجتمع وتوضح ذلك نأخذ المثال التالي:-

يوجد لدينا اربعة طلاب طه، طح، طو، طه، وكانت علاماتهم في مادة الاحصاء من (20) على التوالي 10، 14، 16، 20، فان الوسط الحسابي لعلاماتهم هو:-

$$\text{الوسط الحسابي للمجتمع} = \frac{20 + 16 + 14 + 10}{4} = \frac{60}{4} = 15$$

فاذا سحبنا عينة عشوائية مكونة من ثلاثة طلاب فانها تكون احدى المجموعات حيث لايمكن سحب هذه العينة الا باحدى الطرق الاربعة للعينات الاربعة:

$$\begin{aligned}
 \text{العينة الأولى} &= \frac{16 + 14 + 10}{3} = \frac{40}{3} = 13.33 \\
 \text{العينة الثانية} &= \frac{20 + 14 + 10}{3} = \frac{44}{3} = 14.67 \\
 \text{العينة الثالثة} &= \frac{20 + 16 + 10}{3} = \frac{46}{3} = 15.33 \\
 \text{العينة الرابعة} &= \frac{20 + 16 + 14}{3} = \frac{50}{3} = 16.67
 \end{aligned}$$

وبهذا نجد ان الوسط الحسابي للعينة الاولى والثانية يقل عن الوسط الحسابي للمجتمع ويزيد الوسط الحسابي للعينة الثالثة والرابعة عن الوسط الحسابي للمجتمع ويرجع السبب في ذلك الى الاختيار العشوائي لمفردات العينة.  $\Rightarrow$  وخطأ الصدفة يتوقف على ثلاث عوامل رئيسية.

- (1) حجم العينة، فكلما كان حجم العينة كبيرا كلما قل خطأ الصدفة والعكس بالعكس.
- (2) تباين مفردات المجتمع، فكلما كان التباين كبيرا كان وقوع خطأ الصدفة كبيرا.
- (3) كلما كان الاختيار العشوائي لمفردات العينة سليما كلما امكن التقليل من امكانية الخطأ.

### (ب) خطأ التحيز

يحدث خطأ التحيز نتيجة لزيادة المعلومات أو نقص فيها، والخطورة في هذا الخطأ تكمن في عدم القدرة على حصره ويتعرض له للمسح الشامل كما تعرض له



- العينة ومن الاسباب التي تؤدي الى وجوده في المسح الشامل مايلي:
- اجابات خاطئة يتسبب فيها جامع البيانات نتيجة لعدم كفايته او تحيزه لرأيه او تأثيره على الشخص المبحوث لاعطاء اجابة معينة او لعدم وجود الثقة بين الباحث والشخص المبحوث لاختلاف في الجنس أو اللون او الظروف الاجتماعية، وهي امور جميعها تؤدي الى عدم الدقة في البيانات.
  - اخطاء غير متعمدة من قبل معطي البيانات نتيجة لعدم فهمه بعض الاسئلة الموجودة في الاستمارة الاحصائية.
  - اخطاء عمدية في الاجابة من قبل معطي البيانات عندما يشعر بأن الاسئلة التي تطرح عليه هي اسئلة شخصية تخرجه اجتماعيا وقانونيا.
  - عدم جمع البيانات عن بعض افراد المجتمع او جمع البيانات عن بعض افراد المجتمع من مرة.
- وتعرض العينات لخطأ التحيز لنفس الاسباب التي يتعرض لها المسح الشامل اضافة للاسباب الآتية:-
- في حالة عدم التمكن من الوصول الى بعض مفردات العينة يستعاض عن هذه المفردات بمفردات اخرى مما يؤدي إلى التحيز.
  - عدم وجود اطار سليم عند سحب العينة وقد يكون هذا الاطار قديماً وتنقصه بعض مفردات المجتمع وهذا يؤدي الى تحيز العينة للمفردات الموجودة، أو قد يكون في الاطار بعض المفردات المتكررة مما يؤدي الى تحيز العينة الى هذه المفردات.
- تعريف: "الاطار هو حصر شامل لجميع مفردات المجتمع المراد بحثه وقد يكون قائمة بالمفردات".

## 1-6) تبويب وتصنيف البيانات

بعد جمع الاستثمارات الاحصائية نقوم بتلقيق هذه الاستثمارات من اجل الوصول الى الاستثمارات التي يوجد بها معلومات خاطئة او ناقصة ثم نقوم بارجاعها الى الميدان لتصحيحها او الغاؤها في حالة عدم التصحيح.

الا ان وجود مجموعة كبيرة من الحقائق غير المنظمة في الاستثمارات الاحصائية يجعل الباحث عاجزا عن تحليل هذه البيانات حتى يسهل دراستها والاستفادة منها.

**تعريف:** تصنيف البيانات أي تقسيمها الى مجموعات متجانسة وتفرعها في جداول تلخيصية، ويعتمد هذا التقسيم على طبيعة البيانات وهدف البحث.

**تعريف:** " التبيويب هو وضع البيانات الاحصائية في شكل جداول تمكن من عرضها بصورة تلخص معالمها وتساعد على استخلاص النتائج منها. ويتم تبويب البيانات عادة على اساس تقويم زمني او جغرافي او نوعي او كمي او على اساس خليط من هذه الاسس المختلفة للتقسيم".

ويمكن توضيح ما سبق عن طريق الامثلة التالية:

اعداد الخريجين في كلية ما خلال السنوات 80-83		اعداد خريجي كليات المجتمع عام 82 حسب المحافظات	
السنة	اعداد الخريجين	المحافظة	عدد الخريجين
1980	400	امانة العاصمة	1000
1981	700	محافظة اربد	300
1982	900	محافظة الكرك	150
1983	1000	محافظة البلقاء	100

جدول رقم (1)

جدول رقم (2)

اعداد الخريجين في اكثر 4 كليات عام	
الكلية	اعدادهم
الكلية أ	1000
الكلية أ	1000
الكلية جـ	600
الكلية د	500

جدول رقم (4)

اعداد الخريجين في كلية ما عام 82 موزعين حسب الجنس	
الخريجون	اعدادهم
طلاب	400
طالبات	400

جدول رقم (3)

نلاحظ ان:

الجدول رقم(1) يعرض اعداد الخريجين لكل سنة على حدة أي ان التبويب زمني.

الجدول رقم(2) يعرض اعداد الخريجين لكل محافظة اذا فالتبويب جغرافي

الجدول رقم(3) يعرض اعداد الخريجين حسب الجنس اذا فالتبويب على اساس نوعي

الجدول رقم(4) يعرض اعداد الخريجين حسب احجام الكليات فالتبويب كمي.

## 7-1) تفريغ البيانات الاحصائية

بعد الانتهاء من جمع البيانات سواء كانت البيانات ميدانية ام تاريخية يقوم الباحث بالعملية التالية وهي: عملية تفريغ البيانات، فاذا كان حجم البيانات صغيرا يتم تفريغها يدويا على جداول معدة لهذا الغرض اما اذا كان حجم البيانات كبيرا فيمكن الاستعانة بالآلات التي تعتمد على نظام البطاقات المثقبة سابقا والاقراص الممغنطة والاشرطة حاليا وهذا لا يتم الا عن طريق الترميز للبيانات الوصفية حتى لا تأخذ حيزا كبيرا سواء على البطاقات المثقبة او الاقراص حتى تحفظ في الاجهزة الالكترونية والحاسبات الالكترونية لحين الطلب.

### 1-7-1) التوزيعات التكرارية

**تعريف:** التوزيع التكراري هو عبارة عن توزيع البيانات المأخوذة عن ظاهرة معينة على الفئات بحيث تقع كل مفردة في فئة واحدة فقط والمفردات التي تقع في فئة واحدة تكون متجانسة. ثم نقوم بعدد المفردات التي تقع في الفئة ونضعها في جدول يسمى بالجدول التكراري.

اما اذا كان مدى البيانات صغيرا فانه يمكننا بناء الجدول التكراري بترتيب البيانات ترتيبا تصاعديا حتى تصل الى اعلى قيمة وهذا يمثل العمود الاول، اما العمود الثاني فيمثل عدد المرات التي تكررت بها كل مفردة.

**مثال:** البيانات التالية تمثل الاجور اليومية لخمسة عشر عاملا بالدينار الاردني مصنفة بالجدول التالي .

عدد العمال	الاجور اليومية
2	3
2	3.5
2	4
3	5
1	5.5
3	6
15	المجموع

جدول (1-5)

وأما اذا كان المدى كبيرا وحجم البيانات ايضا كبيرا فلا بد من تقسيم قيم البيانات الى فئات ذات اطوال متساوية او غير متساوية وتفرغ البيانات على هذه الفئات وهذا مايسمى بالتوزيع التكراري الفتوي ونقوم بتابع الخطوات التالية في انشائه:

(1) نحدد اعلى قيمة للملاحظات وادنى قيمة للملاحظات.

(2) نحدد مدى هذه البيانات من العلاقة.

المدى المطلق = اعلى قيمة مشاهدة - ادنى قيمة + 1 (للدقة)

(3) نحدد عدد الفئات وهذا يكون عادة حسب رغبة الباحث ولكن بشكل عام فان

العدد يتراوح  $5 \leq$  عدد الفئات  $\geq 10$  . الا ان بعض الباحثين يرى ان تكون بين

$5 \leq$  عدد الفئات  $\geq 15$  الا ان هذا فيه جهد كبير للباحث.

(4) يحدد طول الفئة وذلك من العلاقة:

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى المطلق}}{\text{عدد الفئات}}$$

ويستحسن ان يكون طول الفئة خال من الكسور لتسهيل العمليات الحسابية.

وعند ظهور مثل هذه الكسور فلا بد من التخلص منها عن طريق تقريبها الى اعلى

وهذا بدوره يؤدي الى نقص في عدد الفئات او مطابقة للفئات المفترضة.

(5) نعين الحد الادنى للفئة الاولى وهو اصغر قيمة مشاهدة.

(6) نحدد الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى من العلاقة.

$$\text{الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى} = \text{الحد الادنى للفئة الاولى} - \frac{1}{2} \text{ وحدة دقة}$$

(7) نعين الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى من العلاقة.

$$\text{الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى} = \text{الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى} + \text{طول الفئة}$$

او نحدد الحد الاعلى للفئة الاولى من العلاقة.

$$\text{الحد الاعلى للفئة الاولى} = \text{الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى} + \frac{1}{2} \text{ وحدة دقة}$$

(8) نحدد الحدود الفعلية الدنيا والعليا وكذلك الحدود الدنيا والحدود العليا لباقي الفئات

من العلاقات التالية:-

الحد الأدنى للفتة اللاحقة- الحد الأدنى للفتة السابقة+ طول الفتة

الحد الأدنى الفعلي للفتة اللاحقة- الحد الأدنى الفعلي للفتة السابقة+ طول الفتة

الحد الأعلى الفعلي للفتة اللاحقة - الحد الأعلى الفعلي للفتة السابقة+ طول الفتة

(9) نحدد مراكز الفتات وذلك من خلال إيجاد مركز الفتة الأولى من العلاقة:

$$\text{مركز الفتة الأولى} = \frac{\text{الحد الأدنى للفتة الأولى} + \text{الحد الأعلى للفتة الأولى}}{2}$$

$$= \frac{\text{الحد الأدنى الفعلي للفتة الأولى} + \text{الحد الأعلى للفتة الأولى}}{2}$$

(10) نجد مراكز الفتات اللاحقة من العلاقة:

مركز الفتة اللاحقة-مركز الفتة السابقة+طول الفتة

(11) نفرغ البيانات على الفتات باستخدام الخطوط الرأسية لكل تكرار وخط افقي للتكرار الخامس ونستمر في التفريغ حتى نهاية آخر مشاهدة.

(12) نسجل مجموع التكرارات عدديا امام كل فتة لتمثل بعمود التكرارات.

(13) نجتمع التكرارات لنقارنها بمجموع المشاهدات حيث يجب التطابق.

مقال: البيانات التالية تمثل الاجر الاسبوعي لخمسين موظف في احدى الشركات الصناعية.

37، 57، 43، 46، 24، 44، 38، 19، 54، 49، 57، 29، 53، 45، 47، 41، 37،  
49، 56، 47، 29، 31، 32، 51، 52، 42، 45، 28، 43، 49، 34، 24، 42، 28،  
39، 21، 18، 37، 34، 29، 23، 35، 43، 39، 41، 26، 27، 32، 37، 28.

المطلوب: انشاء جدول تكراري يمثل جميع ما ورد سابقا.

الحل: نبدأ باتباع الخطوات السابقة.

- نجد المدى المطلق = اكبر قيمة - اصغر قيمة + 1 = 57 - 18 + 1 = 40

- ليكن عدد الفئات 6.

- نجد طول الفئة من العلاقة.

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى المطلق}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{40}{6} = 6.66 \approx 7$$

- نعين الحد الادنى للفئة الاولى وليكن اصغر قيمة وهو 18.

- نعين الحد الادنى الفعلي للفئة الاولى = 18 - 0.5 = 17.5

- نعين الحد الاعلى الفعلي للفئة الاولى = 17.5 + طول الفئة = 17.5 + 7 = 24.5

- نعين الحد الاعلى للفئة الاولى = 24.5 - 0.5 = 24.

بهذا نكون قد حصلنا على الحدود العليا والدنيا وهي [18، 24] والحدود الفعلية الدنيا والعليا للفئة الاولى وهي [ 5 و 17، 5 و 24 ]. وباضافة العدد 7 وهو طول الفئة لكل من الحدود الدنيا والعليا السابقة نحصل على الحدود الدنيا والعليا للفئات اللاحقة.

- نعين مركز الفئة الاولى =  $\frac{24+18}{2} = 21$  نضيف طول الفئة الى مركز الفئة

السابقة لنحصل على مراكز الفئات اللاحقة.

- نفرغ البيانات المعطاة على الفئات التي انشأناها سابقا وذلك بوضع خطوط رأسية وخط مائل للقراءة الخامسة.

- نجتمع التكرارات المناسبة في عمود الخطوط ونضع المجموع في عمود التكرارات.

- تتأكد من مطابقة عدد المشاهدات مع مجموع التكرارات.

نلخص كل الخطوات السالفة الذكر في الجدول التالي:

حدود الفئة	الحدود الفعلية للفئة	مركز الفئة	الاشارات	التكرار
(1)	(2)	(3)	(4)	
24-18	24.5-17.5	21	I IIII	6
31-25	31.5-24.5	28	IIII IIII	9
38-32	38.5-31.5	35	IIII IIII	10
45 - 39	45.5 - 38.5	42	II IIII IIII	12
52-46	52.5-45.5	49	III IIII	8
59-53	59.5-52.5	56	IIII	5

وطالما اننا بصدد التكرارات فلا رد من التنويه الى التكرار النسب والتكرار المتوي وعليه فيكون التكرار لنسبي لكل فئة هو.

$$\text{التكرار النسبي} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}}$$

$$\text{التكرار المتوي للفئة} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}} \times 100\%$$

ولتوضيح هذا المفهوم نورد المثال التالي:

مثال: البيانات التالية تمثل فئات الاجور الاسبوعية لمائة عامل مبينة بالجدول (1-7)

فئات الاجور	34-30	39-35	44-40	49-45	54-50	المجموع
التكرار	5	10	20	25	40	100

جدول ( 1 - 7)



المطلوب: تكوين جدول التكرار النسبي والتكرار المئوي لهذه البيانات .

الحل: الجدول المطلوب هو جدول (8-1)

الفئات	التكرار كـ	التكرار النسبي	التكرار المئوي
34-30	5	$\frac{5}{100}$	%5
39-35	10	$\frac{10}{100}$	%10
44-40	20	$\frac{20}{100}$	%20
49-45	25	$\frac{25}{100}$	%25
54-50	40	$\frac{40}{100}$	%40
المجموع	100	$1 = \frac{20}{20}$	%100

جدول (8-1)

$$\text{نلاحظ ان } \sum_{i=1}^n \text{كـ} = 100\%$$

### 1-7-2 التوزيع التكراري المتجمع

في بعض الاحيان نحتاج الى معرفة عدد المفردات التي تساوي او تزيد عن قيمة معينة تساوي او تقل عن قيمة معينة وحتى نستطيع الحصول على هذه المعلومات لابد من تكوين جدول تكراري متجمع وهو يبين التكرارات المتجمعة لأكثر من فئة وهو نوعان:

أ) الجدول التكراري للمتجمع الصاعد ب) الجدول التكراري للمتجمع الهابط

### أ) الجدول التكراري المتجمع الصاعد

#### خطوات انشاء الجدول

- نضيف فئة سابقة وتكرارها صفر
  - نحول حدود الفئات الى حدود فعلية اذا كانت الفئات منفصلة.
  - نحدث عمودا جديدا يحوي نهاية الفئات.
  - نقوم بتجميع التكرارات من اعلى الى اسفل.
- مثال: الجدول التالي يمثل الأجور لخمسة عشر عاملاً كما هو مبين في جدول (9-1)

فئات الأجور	5-3	8-6	11-9	14-12	17-15
عدد العمال	0	2	3	4	6

جدول (9-1)

المطلوب: تكوين جدول متجمع صاعد.

الحل: نكون جدول الحل (10-1)

فئات الاجور	عدد العمال	الحدود الفعلية	نهاية الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
5-3	صفر	5.5-2.5	اقل من 5.5	صفر
8-6	2	8.5-5.5	اقل من 8.5	2
11-9	3	11.5-8.5	اقل من 11.5	5
14-12	4	14.5-11.5	اقل من 14.5	9
17-15	6	17.5-14.5	اقل من 17.5	15
المجموع	15			

جدول (10-1)

نلاحظ على الجدول ما يلي:

- 1- التكرار الصاعد المناظر للفتة الأولى يساوي تكرار الفتة الأولى.
- 2- التكرار المتجمع الصاعد المناظر للفتة الأخيرة يساوي مجموع التكرارات كلها.

### ب) الجدول التكراري المتجمع الهابط

خطوات انشاء الجدول:

- 1- نضيف فتة لاحقة وتكرارها صفر.
- 2- نحول حدود الفئات الى حدود فعلية اذا كانت الفئات منفصلة.
- 3- نحدث عمودا جديدا يحوي على بداية الفئات.
- 4- نقوم بتجميع التكرارات من أسفل الى أعلى

والان نطبق هذه الخطوات على المثال السابق ليظهر في جدول (1-11).

فئات الاجور	عدد العمال	الحدود الفعلية	بداية الفئات	التكرار المتجمع الهابط
8-6	2	8.5-5.5	أكثر من 5.5	15
11-9	3	11.5-8.5	أكثر من 8.5	13
14-12	4	14.5-11.5	أكثر من 11.5	10
17-15	6	17.5-14.5	أكثر من 14.5	6
20-18	صفر	19.5-17.5	أكثر من 17.5	صفر

جدول (1 - 11)

ونلاحظ على الجدول ما يلي:-

- 1- ان التكرار المتجمع الهابط للفتة الأولى يساوي مجموع التكرارات.
- 2- ان التكرار المتجمع الهابط المناظر للفتة الأخيرة يساوي تكرار الفتة الأخيرة كما ونستطيع ان نعرف من الجدول ان عدد الذين تزيد أجورهم مثلاً عن 5ر8 دينار هو 13 موظفاً وعدد الذين تزيد أجورهم عن 5ر11 دينار هو 10 موظفين

أما بالنسبة لجدول التكرار المتجمع الصاعد فإتانا نستطيع إيجاد عدد الذين تقل أعمارهم مثلاً عن 5ر8 دينار وهم موظفان أو من تقل رواتبهم عن 5ر14 دينار (9 موظفين).

وفي نهاية التوزيعات التكرارية لابد من القاء الضوء على بعض النقاط الهامة التي فاتت ذكرها.

### 1-7-3) الجداول المقفلة والمفتوحة:

**تعريف:** الجدول المقفل هو الجدول الذي تكون فيه الفئة الأولى والفئة الأخيرة محددة. أما الجدول المفتوح من طرفه الأدنى فهو الجدول الذي تكون فيه بداية الفئة الأولى غير محددة. أما الجدول المفتوح من طرفه الأعلى فهو الجدول الذي تكون نهاية الفئة الأخيرة غير محددة. أما إذا كانت بداية الفئة الأولى غير محددة ونهاية الفئة الأخيرة غير محددة فيكون الجدول مفتوحاً من كلا طرفيه ويمكن التوضيح بالمثال التالي:-

6-3	أقل من 3	6-3	أقل من 3
10-7	6-3	10-7	6-3
14-11	10-7	14-11	10-7
	14-11	أكبر من 14	14-11
جدول مقفل	أكبر من 14	مفتوح من طرفه الأدنى	مفتوح من طرفه الأدنى
	مفتوح من كلا طرفيه	مفتوح من طرفه الأعلى	

جدول رقم (1-12) جدول رقم (1-13) جدول رقم (1-14) جدول رقم (1-15)

وكلما كان الجدول مقفلاً كلما كانت العمليات الحسابية أسهل.

#### 1-7-4) الجداول المنتظمة وغير المنتظمة:

**تعريف:** الجدول المنتظم هو الجدول الذي تكون فيه اطوال الفئات متساوية.

**تعريف:** الجدول غير المنتظم هو الجدول الذي تكون فيه اطوال الفئات غير متساوية.

- في حالة انشاء جدول تكراري فان الباحث يقوم بافتراض عدد الفئات لانه لا يوجد قاعدة عامة يعتمد عليها في تحديد عددها الا انه يجب مراعاة الاعتبارات التالية عند تحديد عدد الفئات:

- 1) حجم البيانات وتباينها وتجانسها
  - 2) النتيجة التي يريد الباحث الوصول عليها أن تكون دقيقة او تقريبية.
- تعريف:** الفئة عبارة عن مجموعة جزئية محددة بمحددين الاصغر. ويسمى الحد الأدنى والاكثر ويسمى الحد الاعلى والمفردات الموجودة في الفئة متقاربة ويفضل ان تكون اطوال الفئات متساوية لكي تسهل العمليات الحسابية.
- **تعيين حدود الفئات:** عند تعيين حدود الفئات التي يجب أن تأخذ بعين الاعتبار عدم تداخل هذه الحدود وهذا يعتمد على معرفتنا لنوعين من البيانات هما:-
- 1) البيانات المأخوذة عن ظاهرة منفصلة وتأخذ قيما صحيحة مثل اعداد السيارات، البيوت، الطلاب، الطائرات...الخ.

فلو كانت البيانات المتوفرة لدينا عن اعداد الطائرات الهابطة في مطار عمان الدولي ولمدة مئة يوم ولو فرضنا ان اقل يوم هبطت في المطار بـ 20 طائرة واكثر يوم هبطت فيه 43 طائرة. نلاحظ بأن هذه الظاهرة هي ظاهرة منفصلة (وثابة) والبيانات المأخوذة عنها اعداد صحيحة ولو فرضنا ان طول الفئة يساوي (5) وحدات فان افضل شكل لكتابة هذه الفئات هي الفئات التي يوجد بها ثغرة مقدارها واحد صحيح يبين الحد الاعلى للفئة والحد الأدنى للفئة التي تليها وتكون بالصورة التالية:-

20-24، 25-29، 30-34، 35-39، 40-44 ونلاحظ انه يوجد ثغرة

مقدارها واحد صحيح بين 24،25،29،30،34،35... الخ وهذه الفئات غير متداخلة.  
وتعامل مع هذه الفئات بالحدود الفعلية لها فان الحدود الفعلية للفئة الاولى  
19.5 - 24.5.... الخ ويمكن استخراج طول الفئة لهذا النوع من الفئات عن طريق  
العلاقة التالية:

طول الفئة=الحد الاعلى الفعلي - الحد الادنى الفعلي

(2) البيانات المأخوذة عن ظاهرة متصلة(مستمرة) وتأخذ قيما كسرية مثل البيانات  
عن الاطوال، الاوزان، الاحجام، المسافات.... الخ. فلو فرضنا ان لدينا بيانات  
عن اوزان 50 رجلا(ظاهرة متصلة) وكان اقل مشاهدة هي 55 كغم واكبر  
مشاهدة 70 كغم ان البيانات في هذه الحالة نأخذ قيما كسرية وافضل طريقة  
لكتابه الفئات هي ان تبدأ الفئة بنفس القيمة التي تنتهي فيها الفئة السابقة  
ولو كان طول الفئة 4 وحدات فان الفئات تكتب بالصورة التالية:

#### الفئات

55 وأقل من 59

59 وأقل من 63

63 وأقل من 67

67 وأقل من 71

ان هذه الفئات غير متداخلة ولا يوجد بينها ثغرات فالفئة الاولى تعني ان جميع  
الذين تقع اوزانهم بين 55 كغم واقل من 59 كغم تقع ضمن الفئة الاولى اما  
الرقم(59) فيقع في الفئة الثانية وهكذا.

الفئات غير المتساوية: في حالة بروز فئات غير متساوية في بعض الجداول التكرارية  
فاننا نلجأ لحساب التكرار المعدل والذي يمكن الحصول عليه من العلاقة التالية :

تكرار الفئة الأصلية

= تكرار الفئة المعدل -

طول الفئة

بإعطاء المثال التالي.

مثال : الجدول (16-1) يمثل توزيع القوى العاملة في الأردن حسب السن (بالآلف) لسنة 1970 والمطلوب عمل تكرار معدل لعمود التكرارات .

العمر	-10	-15	-20	-25	-30	-40	-50	-60	65 فما فوق
عدد العمال	10	70	106	89	133	79	45	14	15

جدول (16-1)

الحل : نلاحظ من الجدول أعلاه أن الفئات غير متساوية لذا نقوم بعمل جدول التكرار المعدل والمبين في جدول (1 - 17):

فئات العمر	عدد العمال	التكرار المعدل
-10	10	$2 = \frac{10}{5}$
-15	70	$14 = \frac{70}{5}$
-20	106	$21.6 = \frac{106}{5}$
-25	89	$17.8 = \frac{89}{5}$
-30	133	$13.3 = \frac{133}{10}$
-40	79	$13.3 = \frac{133}{10}$
-50	45	$7.9 = \frac{79}{10}$
-50	45	$4.5 = \frac{45}{10}$
-60	14	$2.8 = \frac{14}{5}$
65 فما فوق	15	$3 = \frac{15}{5}$

مثال : البيانات التالية تمثل أطوال وأوزان 30 طالباً مبينة بالجدول (1-18)

الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن	الطول	الوزن
160	53	171	68	169	68	170	68	175	51	160	55
165	54	178	74	167	70	179	75	175	53	171	65
162	60	177	69	171	65	184	80	168	62	175	69
167	58	179	77	155	50	172	61	159	75	181	54

جدول (1-18)

المطلوب :

- تكوين جدول تكراري مزدوج لهذه البيانات
- عدد الطلاب الذين اوزانهم تتراوح بين 55 وتقل عن 70
- عدد الطلاب الذين اوزانهم 60 فما فوق واطولهم 160 سم فما فوق
- عدد الطلاب الذين اطولهم 165 فما فوق
- أوجد التوزيع الهامشي لقيم س والتوزيع الهامشي لقيم ص.
- نبدأ أولاً بتكوين الجدول التكراري المزدوج في جدول (1-19)

س	فئات الأوزان ص	-50	-55	-60	-65	-70	-75	80-85	المجموع
-155	//					/			3
-160	/	/	//						4
-165	/	/	///	/	/				7
-170			/	////	/	/	/		7
-175	/			//	/	/	//		6
185-180	/							//	3
المجموع		6	2	6	7	3	4	2	30

جدول (1-19)



(2) عدد الطلاب =  $15 = 7 + 6 + 2$

(3) عدد الطلاب = 21

(4) عدد الطلاب =  $23 = 3 + 6 + 7 + 7$

(5) التوزيع الهامشي لقيم س كما في جدول (1-20)

الأطوال	التكرار
-155	3
-160	4
-165	7
-170	7
-175	6
185 - 180	3
	30

جدول ( 1 - 20)

والتوزيع الهامشي لقيم ص كما في الجدول ( 1 - 21)

الوصف	التكرار
-50	6
-55	2
-60	6
-65	7
-70	3
85-80	2
	3

جدول (1-21)

مثال: أكتب التكرار المعدل للجدول التكراري في (22-1):

الفئات	التكرار	التكرار المعدل
-150	15	$3 = \frac{15}{5}$
-155	50	$5 = \frac{50}{10}$
-165	50	$2.5 = \frac{50}{20}$
195-185	30	$3 = \frac{30}{10}$

جدول (22-1)

مع ملاحظة أنه لايجاد التكرار المعدل نجده من العلاقة التالية:

تكرار الفئة

التكرار المعدل للفئة =

طول الفئة

ملاحظة : التكرار المعدل لا يوجد الا للحالات التي تكون فيها الفئات غير منتظمة ونادراً ما يستعمل عندما تكون الفئات متساوية

مثال: البيانات التالية تمثل فئات الأجور الخمسين عاملاً مبنية بالجدول (23-1):

فئات الأجور	التكرار
-40	8
-60	12
-80	20
-100	6
140-120	4
المجموع	50

جدول (23-1)

- المطلوب: (1) إيجاد عدد العمال الذين تقل أجورهم عن 80 دينار.  
 (2) عدد العمال الذين تقل أجورهم عن 55 دينار.  
 (3) نسبة العمال الذين يتقاضون أجراً يزيد عن 90 دينار.  
 (4) نسبة العمال الذين يتقاضون أجراً بين 55-90.  
 (5) عدد العمال الذين تقل أجورهم عن 90 دينار.  
 (6) إيجاد قيمة الاجر الذي يستحق صاحبه الدعم والاجر الا على الذي يستحق صاحبه المكافأة اذا اتفق على ان تكون النسبة الاولى 8% من العمال والنسبة التالية 12% من العمال.

الحل: (1) عدد العمال الذين تقل أجورهم عن  $80 = 12 + 8 = 20$  عاملاً.

(2) طول الفترة  $20 = 40 - 60$ ،  $55 = 40 - 15$  الفرق في الراتب

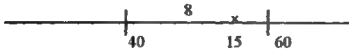
والآن نقوم بعمل نسبة وتناسب

$$8 \leftarrow 20$$

$$\begin{array}{r} 20 \quad 8 \quad \leftarrow \quad 15 \leftarrow \text{س} \\ \hline 15 \quad \text{س} \end{array} =$$

$$\text{وبالضرب التبادلي فإن: } 20\text{س} = 120 \therefore \text{س} = \frac{120}{20} = 6$$

$\therefore$  عدد العمال = 6 عمال الذين تقل أجورهم عن 55 دينار.

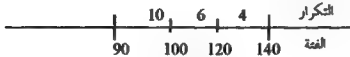


شكل (1-1)

(3)  $100 = 80 - 20$  طول الفترة

$$10 = 80 - 90$$

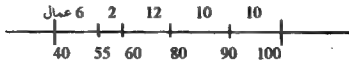
$$\begin{aligned}
 & 20 \leftarrow 20 \\
 & 20 \leftarrow 10 \leftarrow 20 \\
 & 20 - 20 \leftarrow \frac{20}{10} - \frac{20}{10} \\
 & 10 = \frac{200}{20} = 10 \therefore
 \end{aligned}$$



شكل (2-1)

بمجموع العمال الذي تزيد رواتبهم عن 90 دينار =  $10+6+4+20$  عامل  
 نسبة العمال الذي تزيد رواتبهم عن 90 =  $\frac{20}{50} \times 100\% = 40\%$

(4) عدد العمال الذين تقع رواتبهم بين 55، 90 =  $2+12+10+24$  عامل

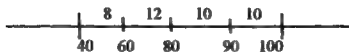


شكل (3-1)

نسبة العمال الذين رواتبهم بين (55-90)

$$48\% = \frac{24}{50} \times 100\%$$

(5) عدد العمال الذين تقل اجورهم عن 90 دينار =  $10+12+8+30$  عاملا



شكل (4-1)

$$\text{النسبة} = \frac{30}{50} \times 100\% = 60\%$$

$$(6) \text{ النسبة الأولى} = \frac{80}{100} \times 50 = 40 \text{ عمال}$$

$$20 \leftarrow 8$$

$$8 \leftarrow 4 \leftarrow \text{س} \quad \leftarrow \quad \frac{20}{\text{س}} = \frac{8}{4} \quad \leftarrow \quad 8 \text{ س} = 80$$

$$\therefore \text{س} = 10$$

$$\text{الاجر الذي يستحق الدعم} = 40 + 10 = 50$$

$$\text{عدد الاشخاص الذين يستحقون المكافأة} = 50 \times \frac{12}{100} = 6$$

### (8-1) عرض البيانات:

بعد جمع وتبويب البيانات يأتي عرض البيانات وهذا يساعد الناظر على أخذ فكرة سريعة عن الظاهرة قيد الدراسة دون تعب واجهاد ويوجد عدة طرق للعرض نذكر اهمها.

#### (1-8-1) العرض الجدولي:

يكتسب العرض الجدولي اهمية كبرى بعد أن يقوم الباحث بتفريغ البيانات الاحصائية ضمن جداول لها ميزات رئيسية منها:

- ان يكون للجدول عنواناً كاملاً مختصراً معبراً عما يحويه الجدول من بيانات.
- أن يضع عناوين بارزة لكل من الصفوف والأعمدة.
- أن يعطي لكل جدول رقم معين.

- أن تحدد الوحدات المستخدمة في الجدول حسب البيانات الموجودة.
- أن ترتب البيانات في الجدول حسب الأهمية والتسلسل الزمني.
- ذكر المصادر المستقى منها البيانات.
- أن توضع الملاحظات الخاصة عن الجدول.

أما هذه الفئات ومن اجل الاختصار فيمكن كتابتها بتحديد بداية الفئات وترك نهايتها لتحديد ضمننا من الفئة التالية لها وفي هذه الحالة تحدد نهاية الفئة الاخيرة كما في الجدول التالي:

الفئات المفتوحة:

-55

-59

-63

71-67

وللعلم ان هذا النموذج من الفئات يمكن استخدامه لبيانات كل من الظاهرتين المنفصلة والمتصلة.

ويمكن إيجاد طول الفئة من العلاقة التالية

طول الفئة = الحد الأدنى للفئة اللاحقة-الحد الأدنى للفئة السابقة.

- 59 - 55-4

### الجدول التكراري المزدوج:

مثال: الجدول التالي يمثل اعداد الطلبة في كلية الهندسة تخصصاتهم وسنواتهم الدراسية.

التخصص	هندسة مدنية	هندسة معمارية	هندسة كيمياوية	المجموع
السنة				
الأولى	40	30	20	90
الثانية	50	40	15	105
الثالثة	60	20	25	105
الرابعة	50	60	60	170
المجموع	200	150	120	470

جدول (1 - 24)

\* يتم قبول الطلبة في السنة الاولى بعد امتحان القبول

المصدر: وزارة التعليم العالي

#### 1-8-2) العرض الهندسي للبيانات المنفصلة :

أ) الاعمدة او المستطيلات

ب) العرض بطريقة الصور

ج) العرض بطريقة الدوائر

د) الخط البياني

#### أ- العرض بطريقة المستطيلات (الاعمدة)

- كثيرا ما نرى من خلال زيارتنا الى المؤسسات المختلفة هذا النوع من التمثيل مما يدل على انتشار هذه الطريقة بشكل واسع ولاستخدام هذه الطريقة تتبع الخطوات التالية:
- نرسم احدائين يلتقيان في نقطة الاصل. يمثل المحور الاول القيمة الوصفية والمحور الثاني القيمة العددية للقيمة المقابلة للقيمة الوصفية.
- اختيار مقياس رسم مناسب يتناسب مع حجم الورقة وحجم القيم العددية.
- رسم مستطيلات ذات قواعد متساوية وتناسب اطوالها مع الاعداد التي يمثلها. وكذلك تكون متباعدة بعدا مناسباً.
- عند مقارنة ظاهرتين او اكثر تكون المستطيلات المقارنة متلاصقة.

مثال: البيانات التالية تمثل اعداد الطلبة في السنة الاولى والثانية والثالثة لطلبة كلية الاداب في جامعة ما حسب تخصصاتهم.

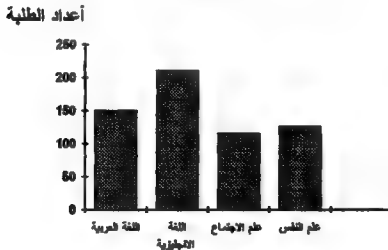
التخصص	اللغة العربية	اللغة الانجليزية	علم الاجتماع	علم النفس	المجموع
السنة					
الاولى	200	150	120	100	570
الثانية	150	210	115	125	600
الثالثة	80	120	80	70	350
المجموع	430	480	315	295	1520

جدول (1-25)

والمطلوب تمثيل هذه البيانات

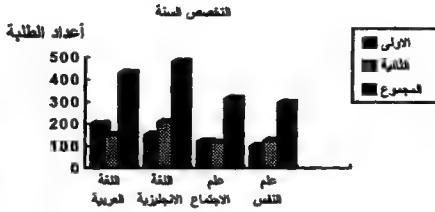
1- بالمستطيلات لطلاب السنة الثانية حسب تخصصاتهم.

2- قارن بالاعمدة بين طلاب السنة الاولى والثانية حسب تخصصاتهم.



شكل (1-6)





شكل (1-7)

### ب- العرض بطريقة الصور:

في هذه الطريقة تكون الصورة المعبرة عن البيانات المراد عرضها كرسيلة ايضاحية تجذب انتباه المشاهد. مثال على ذلك: عند التعبير عن انتاج شركة مرسيلس للسيارات في سنوات مختلفة فكل صورة لسيارة تمثل 1000 سيارة فتضع عدد من الصور بقدر انتاج الشركة لتلك السنة، وبدلا من صورة سيارة المرسيلس سنضع العلامة التجارية لها.

مثال: البيانات التالية هي بيانات افتراضية تمثل انتاج احد مصانع شركة المرسيلس في منطقة بافاريا خلال السنوات 1981/1983 والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالصور.

السنة	كمية الانتاج	الصور (صورة واحدة لكل ألف سيارة)
1981	3000	
1982	4000	
1983	6000	

شكل (1-8)

### ج) العرض بطريقة اللواتر:

تعتبر هذه الطريقة من افضل الطرق لتمثيل البيانات ذات الصفة المشتركة وتسطيع بواسطتها ان تقارن الاجزاء بعضها البعض ثم الجزء (القطاع الدائري) بالكل (الدائرة) وتتبع الخطوات التالية:-

(1) نستخرج زاوية قطاع الدائرة من العلاقة التالية:-

$$\text{زاوية القطاع} = \frac{\text{قيمة الجزء المحدد}}{\text{المجموع الكلي للاجزاء}} \times 360^\circ$$

حيث ان 360 هي الزاوية المركزية للدائرة.

(2) نقوم برسم دائرة معينة ونرسم عليها نصف قطر.

(3) نرسم الزاوية المركزية التي ضلعها الابتدائي نصف القطر والمثلثة بالقطاع.

مثال: بستان به 1080 شجرة مثمرة موزعة كما في الجدول التالي:-

نوع الشجر	العدد
تفاح	180
اجاص	540
عنب	90
دوراق	270
المجموع	1080

جدول (1 - 26)

والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالقطاع الدائري

الحل: نجد زوايا القطاع لجميع اصناف الاشجار المثمرة

$$\text{زاوية القطاع (للتفاح)} = \frac{180}{360} \times 60^\circ = 30^\circ$$

$$\text{زاوية القطاع (للاجاص)} = \frac{540}{360} \times 180^\circ = 270^\circ$$

$$\text{زاوية القطاع (عناب)} = \frac{90}{360} \times 30^\circ = 7.5^\circ$$

$$\text{زاوية القطاع (دراق)} = \frac{270}{360} \times 90^\circ = 67.5^\circ$$

ومجموع هذه الزوايا يجب ان يساوي  $360^\circ$



شكل (1 - 9)

#### (د) التمثيل بالخط البياني :

وهو يوضح العلاقة بين ظاهرتين او اكثر بحيث تمثل على المحور الافقي المسميات او الزمن وعلى المحور الرأسى قيم الظاهرة مع اختيار مقياس رسم مناسب.

مثال: البيانات التالية تبين اعداد المواليد والوفيات في احدى البلدان خلال السنوات 1980 / 1984. مثل هذه البيانات بالخط البياني:

المواليد والوفيات بالآلاف

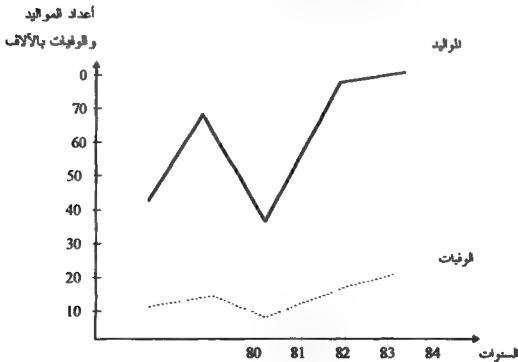
الوفيات	المواليد	السنة
10	50	1980
12	70	1981
8	40	1982
14	80	1983
16	85	1984

جدول (1-27)

الحل: (1) نرصد السنوات التي على المحور الافقي وقيم الظاهرة على المحور الرأسي.

(2) نرصد النقاط على الرسم البياني والتي مساقطها الافقية السنوات والعمودية قيم الظاهرة.

(3) نصل بين النقطة والنقطة التي تليها بخط مستقيم او خطوط متقطعة.



شكل (1-10)

## 9-1 تمثيل الجداول التكرارية :

ويتم ذلك بأحد الأشكال التالية:-

### أ- المدرج التكراري:

تعريف: المدرج التكراري عبارة عن مستطيلات متلاصقة مقامه على محور الفئات، قواعدها أطوال الفئات وارتفاعاتها تكرار كل فئة وللحصول على هذا المدرج تتبع الخطوات التالية:-

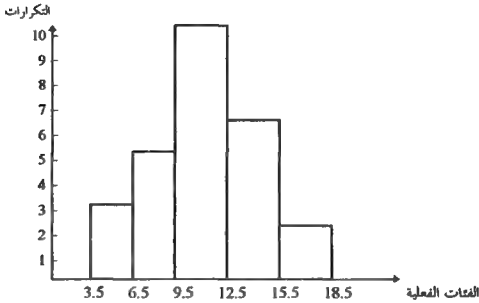
- نرسم محورين متعامدين أحدهما يمثل الفئات الفعلية في حالة الفئات المنفصلة والآخر يمثل التكرارات
- نرصد بداية الفئات الفعلية وعندما نصل الى نهاية اخر فئة نرصد حدها الاعلى.
- نقيم مستطيلات متلاصقة قواعدها الفئات الفعلية وارتفاعاتها التكرارات المقابلة لكل فئة.

مثال : الجدول التكراري التالي بالمدرج التكراري

الحدود الفعلية	التكرارات	الفئات
6.5 - 3.5	3	6-4
9.5-6.5	5	9-7
12.5-9.5	10	12-10
15.5-12.5	6	15-13
18.5-15.5	2	18-16

جدول (1-28)

الحل: بالاستفادة من البيانات السابقة نرسم المدرج ادناه.



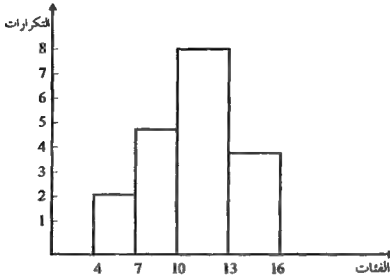
شكل (1-11)

مثال: الجدول التكراري التالي بالمدرج التكراري.

التكرارات	الفئات
2	4 واقل من 7
5	7 واقل من 10
8	10 واقل من 13
4	13 واقل من 16

جدول (1-29)

الحل: في هذا الجدول نستخدم الفئات المتصلة:



شكل (1- 12)

#### (ب) المضلع التكراري:

يمكن رسم المضلع التكراري للجدول التكرارية بطريقتين.

(1) عن طريق المدرج التكراري.

(2) عن طريق مراكز الفئات.

#### (1) عن طريق المدرج التكراري

في هذه الطريقة تتبع الخطوات التالية :-

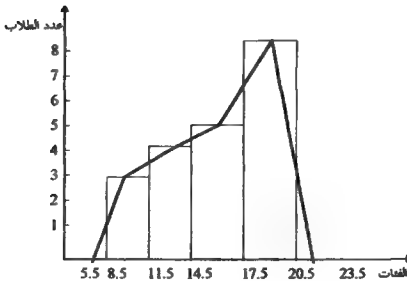
- اضافة فئة سابقة وفئة لاحقة وتكرار كل منهما صفر الى الجدول التكراري وذلك لاغلاق المضلع من كلا طرفيه على المحور الأفقي.
- رسم المدرج التكراري حسب الخطوات السابقة.
- ن نصف قواعد المستطيلات العليا.
- نصل بين كل نقطة والنقطة التي تليها بخط مستقيم فيكون الشكل الناتج هو المضلع التكراري.

مثال: علامات 30 طالب من 20 موزعة كما في لجدول التكراري التالي والمطلوب رسم المضلع التكراري عن طريق المدرج التكراري.

فئات العلامات	عدد الطلاب	الفئات الفعلية
8-6	صفر	8.5 - 5.5
11-9	3	11.5-8.5
14-12	4	14.5-11.5
17-15	5	17.5-14.5
20-18	8	20.5-17.5
23-21	صفر	23.5-20.5

جدول (1-30)

الحل: من البيانات السابقة واتباع الخطوات نرسم الشكل (1 - 13)



شكل (1-13)



## (2) رسم المضلع عن طريق مراكز الفئات.

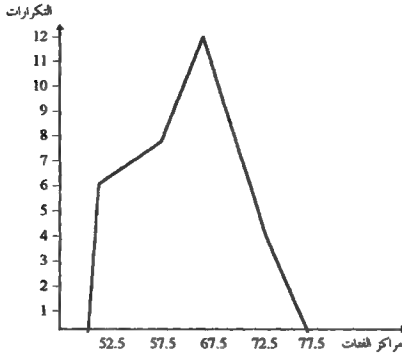
نقوم باتباع الخطوات التالية:-

- نرسم محورين متعامدين الافقي يمثل مراكز الفئات . والعمودي يمثل التكرارات
- نحدد مركز الفئات .
- نعين النقاط على الرسم البياني حيث كل نقطة مسقطها الاول مركز الفئة والمسقط الثاني التكرار للفئة.
- نصل بين النقاط بشكل متتابعي.
- للحصول على مضلع تكراري مغلق نأخذ مركز فئة سابق بتكرار صفر ومركز فئة لاحق بتكرار صفر أيضاً.

مثال: البيانات التالية تمثل اوراق 30 طالبا مبنوية بالجدول التالي:-

مراكز الفئات	التكرار	فئات الاوزان
52.5	صفر	-50
57.5	6	-55
62.5	8	-60
67.5	12	-65
72.5	4	-70
77.5	صفر	80-75

جدول (1-31)



شكل (1-14)

ويجدر بنا ان نذكر انه في حالة رسم المضلع التكراري عن طريق المدرج التكراري فان المساحة التي يحصرها المضلع مساوية للمساحة التي يحصرها المدرج التكراري لان المضلع يحذف اجزاء من المدرج ويضيف له اجزاء وهذه أي المحذوفة والمضافة متساوية في المساحة.

جـ - المنحنى التكراري لرسم المنحنى التكراري تتبع نفس الخطوات التي اتبعناها في رسم المضلع التكراري ولكن الفرق بينهما ان الوصل بين النقطة والنقطة التي تليها في المنحنى تكون بخطوط منحنية اما في المضلع بخطوط مستقيمة . وعادة يستخدم المنحنى في الحالات التي تكون فيها البيانات كبيرة الحجم وذات فترات اطوالها صغيرة والمتغير مستمر مثل الزمن، الاطوال، الاوزان ... الخ.

د- تمثيل الجداول التكرارية المتجمعة بيانيا.

1- المضلع التكراري المتجمع الصاعد.

2- المضلع التكراري المتجمع الهابط.

مثال: الأرباح السنوية بآلاف الدينار ل 30 محلا من كبرى المحلات التجارية في مدينة موزعة كما يلي والمطلوب تمثيل هذا الجدول بالمضلع التكراري المتجمع الصاعد والهابط.

فئات الربح	التكرار	الحدود الفعلية	نهاية الفئات	التكرار المتجمع الصاعد
24-10	صفر	14.5 - 9.5	أقل من 14.5	صفر
19-15	4	19.5-14.5	أقل من 19.5	4
24-20	6	24.5-19.5	أقل من 24.5	10
29-25	15	29.5 -24.5	أقل من 29.5	25
34-30	5	34.5-29.5	أقل من 34.5	30

جدول ( 1 - 32)

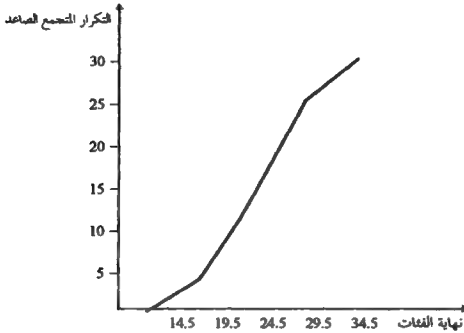
خطوات رسم مضلع تكراري متجمع صاعد

1- ننشأ الجدول التكراري المتجمع الصاعد كالجدول السابق.

2- نرسم خطين متعامدين ونمثل على المحور الافقي نهاية الفئات وعلى المحور الرأسي التكرار المتجمع الصاعد.

3- نرصد النقاط على الرسم البياني والتي مساقطها الافقية نهاية الفئات والرأسية التكرارات المتجمعة الصاعدة.

4- نوصل بخط مستقيم بين النقطة والنقطة التي تليها.



شكل (1-15)

أما المنحنى التكراري المتجمع الهابط فتتبع في رسمه نفس الخطوات التي اتبعت في رسم المضلع التكراري المتجمع الصاعد والفرق الوحيد هو ان نوصل بين النقطة والنقطة التي تليها بخط منحنى بدلا من الخط المستقيم.

## (2) المنحنى التكراري المتجمع الهابط

لرسم المضلع تتبع الخطوات التالية:-

- (1) ننشئ جدول تكراري متجمع هابط (للتمرين السابق).
- (2) نرسم خطين متعامدين ونمثل على المحور الافقي بداية الفئات وعلى المحور الرأسي التكرار المتجمع الهابط.
- (3) نرصد النقاط على الرسم البياني والتي مساقطها الافقية بداية الفئات والرأسية التكرارات المتجمعة الهابطة.
- (4) نصل منحنى مستقيم بين النقاط المتتالية.

فئات الربح	التكرارات	الحدود الفعلية	بداية الفئات	التكرار المتجمع الهابط
19-15	4	19.5-14.5	أكبر من 14.5	30
24-20	6	24.5-19.5	أكبر من 19.5	26
29-25	15	29.5-24.5	أكبر من 24.5	20
34-30	5	34.5-29.5	أكبر من 29.5	5
39-35	صفر	39.5-34.5	أكبر من 34.5	صفر

جدول (1-33)

### 10 - 1) عرض البيانات :

بعد جمع وتبويب البيانات يأتي عرض البيانات وهذا يساعد الناظر على أخذ فكرة سريعة عن الظاهرة قيد الدراسة دون تعب واجهاد ويوجد عدة طرق للعرض نذكر أهمها.

1) العرض الجدولي: يكتب العرض الجدولي أهمية كبرى بعد أن يقوم الباحث بتفريغ البيانات الاحصائية ضمن جداول لها ميزات رئيسية منها.

- ان يكون للجدول عنوان كامل مختصرا معبرا عما يجريه الجدول من بيانات.
  - ان يعطى لكل جدول رقم معين.
  - ان تحدد الوحدات المستخدمة في الجدول حسب البيانات الموجودة.
  - ان ترتب البيانات في الجدول حسب الاهمية والتسلسل الزمني.
  - ذكر المصدر المستقى منه البيانات.
  - ان توضع الملاحظات الخاصة عن الجدول.
- وستتناول أمثلة أخرى مستخدمين الفئات المفتوحة والتي سيغلب استخدامها في هذا الكتاب.

مثال: الجدول التالي يمثل فئات الأجور لمائة عامل مينة بالجدول التالي:

الفئات	-70	-80	-90	-100	110-120	المجموع
التكرار	8	22	40	25	5	100

المطلوب: (1) أوجد مراكز الفئات لهذه الجدول.

(2) أوجد عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن 80 أو تساويه.

(3) أوجد عدد العمال الذين تزيد أجورهم عن 100 أو تساويه.

(4) أوجد عدد العمال الذين تقل أجورهم عن 90.

(5) أرسم المدرج التكراري لهذا التوزيع.

(6) أرسم المضلع التكراري لهذا التوزيع .

(7) أرسم المنحنى التكراري لهذا التوزيع.

(8) أرسم منحنى التجمع الصاعد لهذا .

(9) أرسم منحنى التجمع الصاعد لهذا التوزيع.

الحل: نكون جدول الحل التالي:

فئات الأجور	التكرار	مركز الفئة	فئات أقل من	تكرار صاعد	فئات أكبر من	تكرار هابط
			>		≤	
-70	8	75	70 >	صفر	70 ≤	100
-80	22	85	80 >	8	80 ≤	92
-90	40	95	90 >	30	90 ≤	70
-100	25	105	100 >	70	100 ≤	30
120-110	5	115	100 >	95	110 ≤	5
	100		120 >	100	120 ≤	0

جدول (1-34)

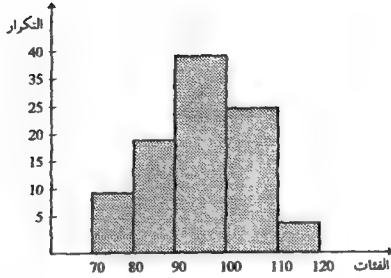
$$(1) \text{ نجد مركز الفئة} = \frac{\text{الحدا الأدنى للفئة التالية}}{2}$$

$$(2) \text{ عدد العمال} = 22 + 40 + 25 + 5 = 92$$

$$(3) \text{ عدد العمال} = 5 + 25 = 30$$

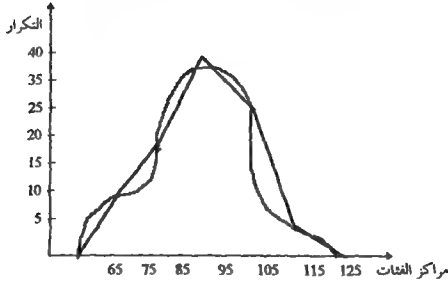
$$(4) \text{ عدد العمال} = 8 + 22 = 30$$

(5)



شكل (1 - 17)

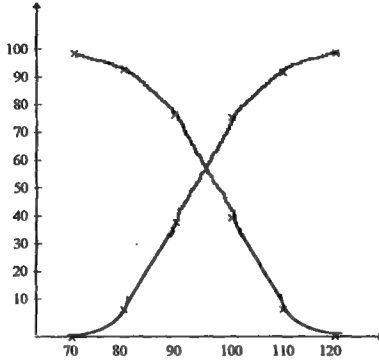
(7 + 6)



شكل (1 - 18)

نستنتج من الرسم أن المضلع مفتوح ولجعله مغلقاً نأخذ فئة سابقة وفئة لاحقة بتكرار صفر ثم نصل مع النقاط الجديدة لكي يصبح المضلع مغلقاً.

8 + 9) المنحنى المطلوب هو :



شكل (1 - 19)

### 11-1) أنواع المنحنيات :

1- من حيث الالتواء والتماثل :



شكل (1 - 21)

منحنى معاملات حول الوسط



شكل (2 - 20)

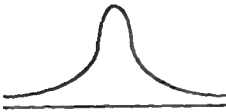
منحنى موزون نحو اليمين



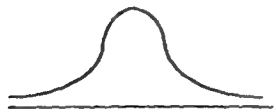


شكل (١ - ٢٢)  
منحنى مطبق نحو اليسار

(2) من حيث التوزيع:



شكل (١ - ٢٤)  
منحنى مائل



شكل (١ - ٢٣)  
منحنى مائل

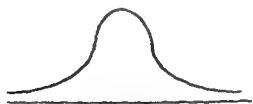


شكل (١ - ٢٥)  
منحنى منوط

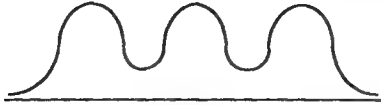
(3) من حيث عدد القمم:



شكل (١ - ٢٧)  
منحنى ثنائي القمة



شكل (١ - ٢٦)  
منحنى وحيد القمة

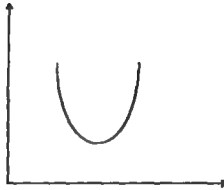


شكل (١ - ٢٨)  
منحنى متعدد القمم

## ١- ١٢) أشكال المنحنيات:

تتمثل أشكال المنحنيات بالأشكال والتسميات التالية:

١- الشكل التوني.



شكل (١ - ٢٩)

٢- الشكل اللامي.



شكل (١ - ٣٠)

### أمثلة إضافية :

مثال : في الجدول التكراري التالي توزيع 500 موظف حسب الأجر الشهري بالدينار، بناءً على بيانات العينة العشوائية المختارة من مجتمع العاملين في إحدى الشركات. كما هو مبين في الجدول التالي :

الفتات	-0	-100	-250	500-1000
عدد العمال	200	150	125	25

جدول (1-35)

- المطلوب: (1) تسمية جدول تكراري غير منتظم.
- (2) إيجاد جدول التكرار المعدل.
- (3) رسم المصنوع التكراري لجدول التكرار المعدل.
- (4) تسمية المنحنى الناتج من حيث التماثل.
- (5) حساب نسبة العمال الذين تزيد أجورهم عن 75 دينار
- (6) حساب نسبة العمال الذين تقل أجورهم عن 300 دينار
- (7) حساب نسبة العمال الذين تقع أجورهم بين 150 دينار، 300 دينار.

الحل: 1- نكون جدول الحل التالي:

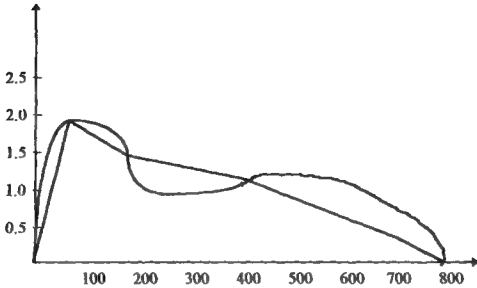
الفتات الدخول	عدد العمال	التكرار المعدل لك	مراكز الفتات مير	لك $\times$ مير	فتات أقل من	التكرار المعدل التجميعي
-0	200	2	50	100	$100 >$	2
-100	150	1	175	175	$250 >$	3
-250	125	0.5	375	187.5	$500 >$	3.50
1000-500	25	0.05	750	37.5	$1000 >$	3.55
	500	3.55		500		

جدول (1-36)

تكرار الفترة

$$(2) \text{ التكرار المعدل} = \frac{\text{تكرار الفترة}}{\text{طول الفترة}}$$

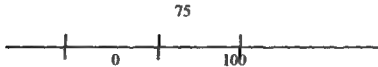
(3) بناءً على النتائج في 2 المطلوب رسم المصّلع التكراري



شكل (1-31)

(4) غير متماثل وانما نحو اليمين.

(5) لحساب نسبة العمال الذين تقل أجورهم عن 75 دينار: نجد عدد العمال ضمن الفترة المطلوبة كما هي موضح بالشكل:



شكل (1-32)

طول فئة التكرار :

$$200 \leftarrow 100$$

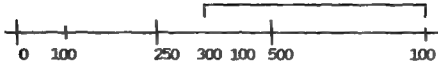
$$75 \leftarrow \text{س} \quad \text{وبالضرب التبادلي} \quad \frac{200}{\text{س}} = \frac{100}{75}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{200 \times 75}{100} = 150 \text{ موظف}$$

$$\frac{3}{10} \quad \frac{150}{500} = 75 \text{ نسبة العمال الذين تقل اجورهم عن 75}$$

(6) لحساب نسبة العمال الذين تزيد اجورهم عن (300) دينار.

نجد أولاً تكرار العمال ضمن هذه الفترة وذلك بالتمثيل على خط الأعداد والفترات.



شكل (1-33)

طول فئة التكرار :

$$125 \leftarrow 250$$

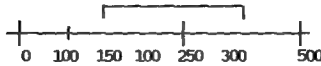
$$50 \leftarrow \text{س} \quad \therefore \text{س} = \frac{50 \times 125}{250} = 25 \text{ موظف}$$

تكرار الفئة المطلوبة = 125 - 25 + 100

$$\frac{1}{4} \quad \frac{125}{500} = 300 \text{ نسبة العمال الذين تزيد اجورهم عن 300}$$

(7) لحساب نسبة الذين تتراوح اجورهم بين 150، 300

نجد عدد العمال للفترة المطلوبة في شكل ( 1 - 34 )



شكل (1-34)

طول فئة التكرار:

$$150 \leftarrow 150$$

$$50 \leftarrow 50$$

$$\therefore \text{س} = \frac{125}{250} = 0.5$$

تكرار الفئة المطلوبة = 100 + 25 = 125

$$\text{نسبة العمال} = \frac{1}{4} \times \frac{125}{500}$$

مثال: البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالبا مبينة كما يلي :

67	59	48	38	47	51	67	72	69	48
59	41	62	41	42	32	42	38	35	21
64	43	79	55	27	67	61	32	47	35
43	58	62	69	29	55	65	54	51	27
31	62	55	65	51	53	67	69	55	42

جدول ( 1 - 37 )

المطلوب: (1) تكوين جدول تكراري

(2) تحديد مراكز الفئات

(3) التكرار النسبي والمثنوي

(4) تمثيل البيانات بواسطة الممدوج التكراري

(5) تمثيل البيانات بواسطة المنحنى التكراري

(6) تمثيل البيانات بواسطة المنحنى المضلع التكراري

(7) عدد الطلاب الذين اوزانهم تقع بين 53-69.

(8) عدد الطلاب الذين تزيد اوزانهم عن 40 كغم

(9) عدد الطلاب الذين تقل وزانهم عن 45 كغم

الحل: (1) لتكوين جدول التكرار

(1) نحدد المدى = أعلى قيمة - ادنى قيمة = 79-1=78-1=77.

ولیکن عدد الفئات = 6 حيث أن  $5 \leq \text{عدد الفئات} \leq 10$

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{77}{6} \approx 12.83$$

ثم نبدأ بتكوين الجدول التالي:

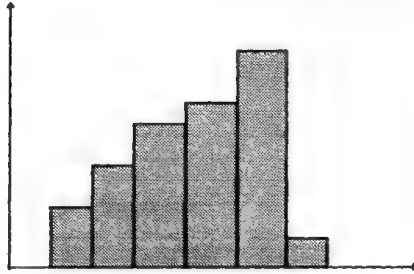
الفئات	التكرار	مركز الفئة	التكرار النسبي	التكرار المتوي
-21	4	26	$\frac{4}{50}$	0.08
-31	7	36	$\frac{7}{50}$	0.14
-41	11	46	$\frac{11}{50}$	0.22
-51	12	56	$\frac{12}{50}$	0.24
-61	14	66	$\frac{14}{50}$	0.28
81 -71	2	76	$\frac{2}{50}$	0.04
المجموع	50		$\frac{50}{50}$	1.00

جدول (1 - 37)

$$(2) \text{ مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة الأولى} + \text{الحد الأدنى للفئة الثانية}}{2} = \frac{31+21}{2} = 26$$

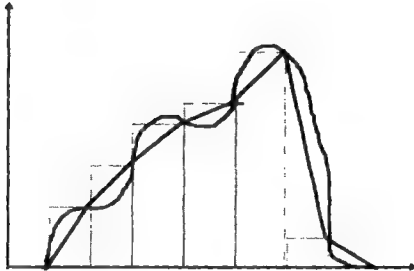
$$(3) \text{ التكرار النسبي للفئة} = \frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{التكرار الكلي}}$$

(4) المدرج التكراري: هو عبارة عن مستطيلات متلاصقة قواعدها هو الفئات وارتفاعاتها التكرارات المقابلة لكل فئة.



شكل (1 - 35)

(5) المنحنى التكراري كما هو موضح في الشكل:



شكل (1 - 36)



(6) المضلع التكراري كما هو موضح في الشكل (1-36).

(7) نجد عدد الطلاب من الشكل (1-37):



شكل (1-37)

$$\begin{array}{rcl} 12 & \leftarrow & 10 \\ 2.5 \approx 2.4 - \frac{12 \times 2}{10} = \text{س} & \therefore & \text{س} \leftarrow 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 14 & \leftarrow & 10 \\ 11 \approx 11.2 - \frac{14 \times 8}{10} = \text{س} & \therefore & \text{س} \leftarrow 8 \end{array}$$

$\therefore$  عدد الطلاب الذين تتراوح أوزانهم بين 53، 69 هو  $21 - 11 + 10 = 69$

(8) نجد عدد الطلاب الفترة المطلوبة كما في الشكل (1-38):



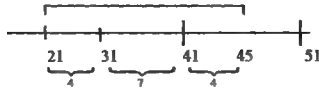
شكل (1-38)

$40 - 31 = 9$  ، 10 طول الفترة ويقابلها تكرار 7

$$\begin{array}{rcl} 7 & \leftarrow & 10 \\ 6 \approx 6.3 - \frac{7 \times 9}{10} = \text{س} & \therefore & \text{س} \leftarrow 9 \end{array}$$

عدد الطلاب =  $40 - 2 + 14 + 12 + 11 + 1 = 40$

9) نجد عدد الطلاب الفترة المطلوبة كما في الشكل (1-39):



شكل (1-39)

$$4 \approx 4.4 = \frac{11 \times 4}{10} = 4.4 \quad \therefore \text{س} \quad \leftarrow \quad 11 \quad \leftarrow \quad 10$$

عدد الطلاب الذين تقل أوزانهم عن 45 = 4 + 7 + 4 = 15 طالب

## تمارين عامة على الفصل الأول

س1- إذا كانت مراكز الفئات للبيانات المبوبة في جدول تكراري كالتالي :-

32، 35، 38، 41، 44

أوجد مايلي:

(1) طول الفئة.

(2) الفئات الفعلية للتوزيع.

(3) فئات التوزيع.

س2 :- البيانات التالية تمثل عدد أمتار النسيج المصنوعة في 30 مصنعا " للنسيج خلال اسبوع بآلاف الأمتار.

40	59	46	57	49	40
44	39	47	58	51	39
56	52	61	41	53	48
61	56	62	60	55	42
63	43	63	43	54	44

أوجد ما يلي :-

(1) مبتدئا بالعدد 39 شكل جدولا تكراريا ذات فئات منفصلة وطول كل فئة 5 وحدات.

(2) كم عدد فئات الجلول

(3) ارسم مدرجا تكراري.

- (4) ارسم مضلعا تكراريا عن طريق مركز الفئات.
  - (5) ارسم مضلعا تكراريا متجمعا صاعدا.
  - (6) اوجد التكرار النسبي لهذا التوزيع.
  - (7) اوجد التكرار المتوي لهذا التوزيع.
  - (8) كم مصنعا انتج اقل من 54 ألف متر.
  - (9) كم مصنعا انتج اكثر من 48 ألف متر.
  - (10) مبتدئا بالعدد 39 كون جدولا تكراريا اذا فئات بأطوال 4 وحدات شريطة أن تكون الفئات متصلة.
- مس3:- البيانات التالية تمثل اوزان 40 رجلا لاقرب كغم.

65	59	72	63	72	69	62	60
62	66	73	75	65	75	63	61
77	68	74	61	66	74	67	59
74	69	62	63	72	77	68	7
68	70	60	64	73	71	64	76

اوجد ما يلي :

- (1) مبتدئا بالعدد 59 كون جدولا تكراريا اذا فئات بطول 3 وحدات شريطة أن تكون هذه الفئات هي فئات متصلة وكم عدد هذه الفئات.
- (2) ارسم ملرجا تكراريا.
- (3) ارسم مضلعا تكراريا عن طريق مراكز الفئات.

- (4) ارسم مضلعاً تكرارياً متجمعا صاعدا.
  - (5) اوجد التكرار النسبي لهذه التوزيع.
  - (6) اوجد التكرار المتوي لهذا التوزيع.
  - (7) كم عدد الذين تزيد اوزانهم عن 68 كغم أو تساوي 68 كغم.
  - (8) كم عدد الذين تقل اوزانهم عن 68 كغم.
  - (9) مبتدئا بالعدد 58 كون جدولا تكراريا لفئات متصلة ويطول 4 وحدات.
- س4:- كانت النتائج النهائية السنوية لاحدى المدارس الثانوية كما هي في الجدول التالي:-

النسبة المئوية	فئات الطلاب
65%	الناجحون
10%	الراسبون
5%	المفصولون
20%	حاملو المواد

والمطلوب تمثيل هذه البيانات بالقطاع الدائري

س5: البيانات التالية تمثل اعداد الخريجين لاحدى الكليات في احد الأعوام الدراسية

حسب التخصص والجنس

التخصص	الذكور	الإناث	المجموع
كمبيوتر	80	40	120
رياضيات	60	30	90
اجتماعيات	40	20	60
لغة عربية	100	60	160

والمطلوب ما يلي:-

- 1- قارن بين مختلف التخصصات بواسطة الأعمدة.
  - 2- مثل كل تخصص على حدة بالقطاع الدائري ثم مثل جميع التخصصات في دائرة واحدة.
  - 3- مثل التخصصات بالأعمدة دون التطرق إلى الجنس.
  - 4- مثل هذه البيانات بالخط البياني.
- ص6:- البيانات التالية تمثل الدخل الكلي لأحدى المحافظات خلال الأعوام 1980/1984.
- قارن بين هاتين الظاهرتين عن طريق تمثيلها بالخط البياني:-

جدول الدخل الكلي والانفاق الكلي بآلاف الدينارين

الانفاق الكلي	الدخل الكلي	السنوات
130	190	1980
80	160	1981
140	210	1982
150	230	1983
135	200	1984

ص7:- عرف ما يلي:-

علم الإحصاء، علم الإحصاء الوصفي، علم الإحصاء التحليلي، المصادر التاريخية للمعلومات، المصادر الميدانية للمعلومات، الاستمارة الإحصائية، كشف البحث، صحيفة الاستبيان، طريقة المسح الشامل، العينة، العينة العمدية، العينة العشوائية، الخطأ العشوائي، خطأ التحيز، تبويب

البيانات، التوزيع التكراري، الجدول التكراري، الفقة، التكرار النسبي، التكرار المتوي، الجداول المقفلة، الجداول المفتوحة ، الجدول المنظم، الجدول غير المنظم، الفئات المنفصلة، الفئات المتصلة، المدرج التكراري.

مس8:- ماهو الخطأ العشوائي، مصادره، كيفية التقليل من قيمته.

مس9:- فيما يلي الجدول التكراري التجميعي لتوزيع الاجر الاسبوعي (بالدينار) لعمال مصنع ما عددهم "144" عاملاً.

التكرار التجميعي	اقل من
28	4
58	10
68	15
84	23
119	30
144	40

المطلوب:

1- رسم المنحنى التجميعي الصاعد والمنحنى التجميعي الهابط.

2- ما هي احداثيات نقطة تقاطع المنحنيين الصاعد والهابط.

3- بناءاً على المعلومات الموجودة في الجدول السابق:

اختيار العينة العشوائية المناسبة بكسر المعاينة(12/1)

مس10: من المعلوم أن توزيع الطلبة المتخصصين في كلية الاقتصاد والعلوم الإدارية في الأعوام الدراسية 80/81 و 81/82 كما هو مبين في الجدول التالي:

التخصص / العام الدراسي	1981/1980	1982/1981
الاقتصاد والاحصاء	130	245
ادارة الاعمال	350	415
الادارة العامة	180	366
العلوم السياسية	60	122
المجموع	1000	1500

المطلوب :-

- 1- ما هو نوع (أو أنواع) التصنيف الذي أدى الى تكوين هذا الجدول .
  - 2- تمثيل البيانات الموجودة في الجدول.
    - أ- بطريقة الأعمدة (المستطيلات) المجزئة.
    - ب- بطريقة الدوائر المقسمة الى قطاعات.
  - 3- اختيار عينة عشوائية مناسبة بكسر المعاينة (0.02) من بين طلبة 81/80
- ص11:- فيما يلي الجدول التكراري المتجمع الصاعد لعينة مؤلفة من (50) طالباً  
 ناهجاً موزعة حسب علاماتهم في مساق الاحصاء (101).

أقل من	أقل من 60	أقل من 70	أقل من 80	أقل من 90	أقل من 100
التكرار المتجمع	8	20	40	47	50

المطلوب (1): تكوين الجدول التكراري الأصلي

(2) تكوين الجدول التكراري النسبي

(3) رسم المنحنى المتجمع الصاعد.



س12: يبلغ عدد الطلبة في كلية الآداب (1000) طالباً من بينهم 600 من الاناث.  
المطلوب اختيار العينة العشوائية الممثلة المناسبة بكسر المعينة 0.020 وذلك من أجل تشكيل وفد طلابي، متبعا الخطوات بالترتيب مع ذكر هذه الخطوات.  
س13:- فيما يلي جدول تكراري لتوزيع عينة مؤلفة من 60 طالبا حسب علاماتهم

فئات الطلاب	-40	-50	-60	-70	-80
عدد الطلبة	8	12	20	16	4

المطلوب:- 1. رسم المنحني التجميعي الصاعد

2. حساب نسبة الطلبة الذين تقل علاماتهم عن 76.

3. حساب العلامة التي حصل على أعلى منها 10٪ من الطلبة.

س14:- فيما يلي جدول تكراري يبين توزيع 50 طالبا حسب معدلاتهم التراكمية.

فئات العلامات	-35	-60	-67	-76	-84
عدد الطلبة	2	21	18	8	1

المطلوب إيجاد:-

1- الجدول التكراري المعدل .

2- نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين (65و75)

3- إذا اختير ما نسبته 15٪ من الطلبة للدراسات العليا ما هي أدنى علامة تؤهل الطالب للحصول على هذه الفرصة.

4- رسم المصّلع التكراري، وبيان تمثاله.



## الفصل الثاني

### مقاييس النزعة المركزية

#### (1-2) مقدمة:

ان كلمة النزعة المركزية تعني الرغبة في التمرکز والتكثف نحو رقم معين وهذا هو محور دراستنا في هذه الوحدة وكل الذي نوده كيفية حساب هذه القيمة لتمثل باقي القيم تمثيلاً سليماً والتي تعتبر مقياساً لباقي القيم وقد وجد باحثو الاحصاء العديد من هذه المقاييس.

1) الوسط الحسابي (2) الوسيط (3) للنوال (4) الوسط الهندسي (5) الوسط التوافقي (6) الوسط الترييبي.

هذا وستناول كل مقياس على حدى بنوع من التفصيل من حيث الخصائص وطرق ايجاده.

#### (2-2) الوسط الحسابي:

تعريف: الوسط الحسابي لمجموعة مشاهدات هو مجموع هذه المشاهدات مقسوماً على عددها ويمكن كتابة هذه العلاقة الرياضية:

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع المشاهدات}}{\text{عدد المشاهدات}} \dots\dots\dots (1 - 2)$$

## 2-2-1) كيفية إيجاد الوسط الحسابي :

أ- اذا كانت لدينا البيانات غير مبوبة. وهذه تكون بصورتين.

### (1) البيانات غير مبوبة ومفردة (غير متكررة).

تعريف: اذا كان لدينا قيم المشاهدات  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ ، فإن الوسط

الحسابي لهذه المشاهدات  $\bar{x}$  هو

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \quad (2-2)$$

او باستخدام رمز المجموع فاننا نكتب للمتوسط الحسابي على الصورة

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (3-2)$$

حيث  $i=1, 2, \dots, n$ .

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية.

3، 5، 7، 11، 13، 21 والمطلوب إيجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات.

الحل: باستخدام العلاقة أعلاه فإن:

$$\bar{x} = \frac{3+5+7+11+13+21}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

مثال: اذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من المشاهدات 84 وكان مجموع هذه المشاهدات 420 أوجد عدد هذه المشاهدات.

الحل: من العلاقة الوسط الحسابي =  $\frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

$$5 = \frac{420 \times 1}{84} = \bar{x} \leftarrow \frac{420}{n} = 84$$

(2) اذا كانت المشاهدات متكررة في جدول تكراري فاننا نجد الوسط الحسابي (الوسط الحسابي الموزون او المرجح)

تعريف: اذا كان لدينا قيم المشاهدات  $x_1, x_2, \dots, x_n$  وتكراراتها المقابلة على التوالي  $k_1, k_2, \dots, k_n$ ، كـن فان الوسط الحسابي يكون

$$\bar{x} = \frac{x_1 k_1 + x_2 k_2 + \dots + x_n k_n}{k_1 + k_2 + \dots + k_n} \quad (4 - 2)$$

او باستخدام صيغة لمجموع

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j \times k_j}{\sum_{j=1}^n k_j} \quad (5 - 2)$$

مثال: في شعبة ادارة الاعمال اعطى مئة طالب امتحان احصاء عشر من علامات وكان توزيع الطلاب حسب العلامات التي حصلوا عليها موزعة بالجدول (1-2):

العلامة	10	9	8	7	6	5	4
عدد الطلاب	5	16	21	35	13	8	2

جدول (1 - 2)

المطلوب: إيجاد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات.

الحل: نلجأ لحل مثل هذه المسائل اما بتكوين جدول الحل (2 - 2) وباستخدام العلاقة المعطاة:

التكرار كـ	العلامة سـ	سـ × كـ
5	10	50
16	9	144
21	8	168
35	7	245
13	6	78
8	5	40
2	4	8
100		733

$$\bar{س} = \frac{733}{100} = 7.33$$

$$\bar{س} = \frac{\sum سـ \times كـ}{\sum كـ}$$

او نجد الوسط الحسابي من العلاقة التالية مباشرة  $\bar{س} =$

دون استخدام الجدول أعلاه على النحو التالي:

$$\bar{س} = \frac{2 \times 4 + 8 \times 5 + 13 \times 6 + 35 \times 7 + 21 \times 8 + 16 \times 9 + 5 \times 10}{2 + 8 + 13 + 35 + 21 + 16 + 5}$$

$$7.33 = \frac{733}{100} = \frac{8 + 40 + 78 + 245 + 168 + 144 + 50}{100} =$$

(ب) إيجاد الوسط الحسابي للبيانات المبوبة :

هناك عدة طرق لإيجاد الوسط الحسابي وسوف نستعرض في كتابنا هذا اهم الطرق المستخدمة.

1) طريقة استخدام التكرارات او طريقة القانون العام: في هذه الطريقة تتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات سر.
- نجد مجموع حاصل ضرب مركز كل فئة بالتكرار المقابل لها أي  $\sum x \cdot ك$ .
- نجد مجموع التكرارات أي  $\sum ك$
- ونستخدم العلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot ك_i}{\sum_{i=1}^n ك_i} \dots\dots\dots (2 - 6)$$

مثال: أوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات المبوبة بالجدول (2-3) بالطريقة المباشرة.

الفئات	24-20	29-25	34-30	39-35	44-40	المجموع
التكرار	7	13	21	6	3	50

جدول (2 - 3)

الحل: نشكل الجدول (2 - 4) والذي يحتوي على جميع الحسابات المطلوبة لهذه الطريقة.

الفئات	التكرار ك	مراكز الفئات سر	سر $x \cdot ك$
24 - 20	7	22	154-22×7
29 - 25	13	27	351-27×13
34 - 30	21	32	672 -32×21
39 - 35	6	37	222-37×6
44 - 40	3	42	126-42×3
المجموع	50		1525

جدول (2 - 4)

ومن العلاقة نقسم مجموع حاصل الضرب على مجموع التكرارات.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{j=1}^n x_j \times K_j}{\sum_{j=1}^n K_j}$$

$$305 = \bar{X} = \frac{1525}{50}$$

(2) إيجاد الوسط الحسابي باستخدام الوسط الفرضي :

لايجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة تتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات  $X_j$ .
- نأخذ أي مركز فئة كوسط فرضي وغالباً ما تكون الفئة المقابلة للأكثر تكراراً ويرمز له بالرمز (أ).
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي ونرمز لها بالرمز  $x$ .
- نجد مجموع حاصل الضرب أي  $\sum_{j=1}^n x_j \times K_j$ .
- نجد الوسط الحسابي من العلاقة.

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{j=1}^n x_j \times K_j}{\sum_{j=1}^n K_j} \quad \dots\dots\dots (2 - 7)$$

مثال: إذا كان لدينا البيانات التالية والمبوبة بالجدول (2 - 5):



الفئات	-30	-40	-50	-60	-70	المجموع
التكرار ك	2	9	21	11	7	50

جدول (2 - 5)

المطلوب إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي.

الحل: نكون الجدول (2 - 6) والمتضمن الحسابات الواردة في الخطوات:

الفئات	التكرار ك	مراكز الفئات من	ح = س - أ	ح × ك
-30	2	35	20 - 55 - 35	40 - 20 × 2
-40	9	45	10 - 55 - 45	90 - 10 × 9
-50	21	55	0 - 55 - 55	0 - 0 × 21
-60	11	65	10 - 55 - 65	110 - 10 × 11
-70	7	75	20 - 55 - 75	140 - 20 × 7
المجموع	50			120

جدول (2 - 6)

وليكن الوسط الفرضي أ = 55 وباستخدام العلاقة أدناه فإن:

$$\bar{S} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{ح} \times \text{ك}}{\sum_{i=1}^n \text{ك}} + \bar{A}$$

$$\text{نجد أن } \bar{S} = 55 + \frac{120}{50} = 55 + 24 = 574$$

### (3) إيجاد المتوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

ولايجاد الوسط الحسابي بهذه الطريقة تتبع الخطوات التالية.

- نجد مراكز الفئات سر
- نأخذ وسط فرضي وليكن أ والمقابل للاكثر تكرار من مراكز الفئات
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي أي حـ
- نجد الانحرافات المختصرة ولتكن  $\bar{X}$   $\bar{X} = \frac{\sum X}{L}$  طول الفئة
- نجد حاصل ضرب حـ س  $\sum X \times S$
- نجد مجموع حاصل ضرب حـ  $\sum X \times K$
- نجد المتوسط الحسابي من العلاقة.

(8-2) .....

$$\bar{X} = A + \frac{\sum_{i=1}^n X \times K}{\sum_{i=1}^n K}$$

مثال: البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالباً موزعين في الجدول ( 2 - 7 ).

الفئات	54-50	59-55	64-60	69-65	74-70	المجموع
الطلاب	7	13	25	3	2	50

الجدول ( 2 - 7 )

المطلوب: إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

الحل: نكون الجدول (2-8) والمتضمن جميع الحسابات الواردة في الخطوات السابقة.

الصفات	التكرار ك	مراكز الصفات سر	الانحرافات عن الوسط الفرضي ح	الانحرافات المختصرة ح	ح × ك
54-50	7	52	10 - 62 -52	$2 - = \frac{10-}{5}$	$14 - = 2 - \times 7$
59 -55	13	57	5 - = 62 -57	$1 - = \frac{5-}{5}$	$13 - = 1 - \times 13$
64-60	25	62	0 - 62 -62	$0 = \frac{0}{5}$	$0 - 0 \times 25$
69-65	3	67	5-62-67	$1 = \frac{5}{5}$	$3 = 1 \times 3$
74-70	2	72	10-62 -72	$2 = \frac{10}{5}$	$4 = 2 \times 2$
الجموع	50				20-

جدول (2 - 8)

وليكن الوسط الفرضي = 62

$$\text{ويتطبيق العلاقة من} = \bar{x} + \frac{\sum_{i=1}^n \text{ح} \times \text{ك}}{\sum_{i=1}^n \text{ك}} \times \text{ل}$$

$$\text{نجد ان} \bar{x} = 62 - 5 \times \frac{20}{50} = 62 - 2 = 60$$

مثال: البيانات التالية تمثل الأجر الأسبوعي لمائة عامل مبنية بالجدول (2-9):

الفئات	-30	-35	-40	-45	-50	المجموع
التكرار	7	17	36	29	11	100

جدول (2 - 9)

المطلوب إيجاد:

أ) الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة.

ب) الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن الوسط الفرضي.

ج) الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة.

الحل: نكون الجدول (2-10) والمتضمن جميع الحسابات المطلوبة في الخطوات السابقة.

الفئات	التكرار	مراكز الفئات من مركز	مركب ك	ح = مركب - 1	ح و ك د	م = ح / د	م × ك د
-30	7	32.5	227.5	10 - 42.5 - 32.5	70 - 10 × 7	$2 - \frac{10-}{5}$	14 - 2 × 7
-35	17	37.5	637.5	5 - 42.5 - 37.5	85 - 5 × 17	$1 - \frac{5-}{5}$	17 - 1 × 17
-40	36	42.5	1530	0 - 42.5 - 42.5	0 - 0 × 36	$0 - \frac{0-}{5}$	0 - 0 × 36
-45	29	47.5	1377.5	5 - 42.5 - 47.5	145 - 5 × 29	$1 - \frac{5-}{5}$	29 - 1 × 29
-50	11	52.5	577.5	10 - 42.5 - 52.5	110 - 10 × 11	$2 - \frac{10-}{5}$	22 - 2 × 11
المجموع	100		4350		100		20

جدول (2 - 10)

ليكن الوسط الفرضي أ = 42.5

ليكن الوسط الفرضي  $\bar{A} = 42.5$

$$\bar{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times \text{كر}}{\sum_{i=1}^n \text{كر}} \quad \text{أ) الوسط الحسابي بالطريقة المباشرة}$$

$$\sum_{i=1}^n \text{كر}$$

$$\bar{A} = \frac{4350}{100} = 43.50$$

ب) الوسط الحسابي باستخدام الانحرافات عن الوسط الفرضي:

$$\bar{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times \text{كر}}{\sum_{i=1}^n \text{كر}} + \bar{A}$$

$$\bar{A} = 42.5 + \frac{100}{100} = 43.5$$

ج) إيجاد الوسط الحسابي باستخدام الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي أ .

$$\bar{A} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times \text{كر}}{\sum_{i=1}^n \text{كر}} + \bar{A}$$

$$\bar{A} = 42.5 + 5 \times \frac{20}{100} = 43.5$$

نلاحظ ان الوسط الحسابي في الطرق الثلاث متساوية.

## 2-2-2) الوسط الحسابي المرجح:

لحل هذا المفهوم يفيد كثيراً في حالات دمج مجموعات ذات أحجام عناصر مختلفة ولا بد من التوقف عند هذا المفهوم لتتناول هذا التعريف.

تعريف: اذا كان لدينا من مجموعات من المشاهدات معروفة  $n_1, n_2, \dots, n_r$  وقيمنا

بعملية دمج مجموعات المشاهدات المختلفة وأردنا إيجاد الوسط الحسابي للمجموعات بعد الدمج فأننا نجد الوسط الحسابي للمجموعات بعد الدمج (الوسط الحسابي المرجح) من العلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{1 \times x_1 + 2 \times x_2 + \dots + n \times x_n}{1 + 2 + \dots + n} \dots\dots\dots (2 - 9)$$

مثال: اذا كان لدينا ثلاثة عينات احجامها على التوالي  $1 = n_1$ ,  $2 = n_2$ ,  $3 = n_3$  وكانت اوساطها  $1 = x_1$ ,  $45 = x_2$ ,  $75 = x_3$ ، ودمجت المجموعات الثلاث معاً أوجد الوسط الحسابي المرجح للمجموعات بعد الدمج.

$$\begin{aligned} \text{الحل: } \bar{x} &= \frac{1 \times x_1 + 2 \times x_2 + 3 \times x_3}{1 + 2 + 3} \\ &= \frac{1 \times 1 + 2 \times 45 + 3 \times 75}{1 + 2 + 3} \\ &= \frac{1 + 90 + 225}{6} \\ &= \frac{316}{6} = 52.67 \end{aligned}$$

## 2 - 2 - 3 خصائص الوسط الحسابي:

(1) مجموع انحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي = صفر.

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات 17، 21، 15، 27، 20، أثبت أن مجموع انحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي يساوي صفراً.

$$\text{الحل: } \bar{x} = \frac{17 + 20 + 15 + 21 + 27}{5} = \frac{100}{5} = 20$$

نجد الانحرافات المشاهدات عن الوسط الحسابي:

$$ح_1 = س_1 - س_1 - 17 - 20 - 3$$

$$ح_2 = س_2 - س_2 - 21 - 20 - 1$$

$$ح_3 = س_3 - س_3 - 15 - 20 - 5$$

$$ح_4 = س_4 - س_4 - 27 - 20 - 7$$

$$ح_5 = س_5 - س_5 - 20 - 20 - 0$$

$$\Sigma ح = -3 - 1 + 5 - 7 = \text{صفر}$$

وهذا ما يؤكد الخاصية بأن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي = صفر.

(2) الوسط الحسابي يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال : اوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات التالية.

$$2500، 40، 50، 13، 37$$

$$\text{الحل : } \bar{س} = \frac{2500 + 40 + 50 + 13 + 37}{5} = \frac{2640}{5} = 528$$

وهذا العدد بعيد كل البعد عن باقي قيم المشاهدات وهذا من جراء القيمة

المتطرفة 2500 لكن لو استبعدنا القيمة المتطرفة فنلاحظ ان الوسط الحسابي سيصبح واقعياً.

مثال : اوجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات اعلاه بدون القيمة المتطرفة.

$$\text{الحل : } \bar{س} = \frac{40 + 50 + 13 + 37}{4} = \frac{140}{4} = 35$$

وهذه القيمة متقاربة مع قيم المشاهدات الاخرى.

(3) يأخذ كل قيم المشاهدات في الاعتبار من العلاقة:

وهذا واضح من العلاقة الرياضية التالية:

$$\frac{-n + 1 + 2n + \dots + n}{n} = \frac{n}{n}$$

مثال: أوجد المتوسط الحسابي لعلامات خمسة طلاب في امتحان احصاء كانت كما يلي

يلي 8،0،6،9،7

$$\text{الحل: نجد } \bar{x} = \frac{8+0+6+9+7}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

(4) المتوسط الحسابي هو متوسط لقيم المشاهدات في المجموعة وليس متوسط لترتيب القيم كما هو الحال في الوسيط.

(5) مجموع مربعات انحرافات القيم عن وسطها أقل من مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي قيمة أخرى.

مثال: أ) أوجد مربع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي لقيم المشاهدات 5،3، 13،9، 10 ثم أوجد مربع الانحرافات عن القيمة 13.

وقارن بين النتيجة الأولى والثانية لتثبت صحة الخاصية أعلاه.

$$\text{الحل: نجد: } \bar{x} = \frac{10+13+9+5+3}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

نجد:

$$ح_1 = 1 - س_1 = 3 - 8 = -5 \quad ، \quad ح_1^2 = 25$$

$$ح_2 = 2 - س_2 = 5 - 8 = -3 \quad ، \quad ح_2^2 = 9$$

$$ح_3 = 3 - س_3 = 9 - 8 = 1 \quad ، \quad ح_3^2 = 1$$



$$ح_4 س_4 - س_4 = 13 - 8 - 5$$

$$ح_5 س_5 - س_5 = 10 - 8 - 2$$

$$\sum ح_2 = 64$$

نجد الانحرافات لقيم المشاهدات عن الملاحظة 13

$$ح_1 س_1 - 13 = 13 - 3 - 10$$

$$ح_2 س_2 - 13 = 13 - 5 - 8$$

$$ح_3 س_3 - 13 = 13 - 9 - 4$$

$$ح_4 س_4 - 13 = 13 - 13 - 0$$

$$ح_5 س_5 - 13 = 13 - 10 - 3$$

$$\sum ح_2 = 150$$

نلاحظ ان مجموع الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي اقل من مجموع انحرافات القيم عن اية قيمة اخرى لأن  $150 > 64$ .

(5) عند اضافة عدد ثابت الى جميع قيم المشاهدات فالتنا نضيف هذه العدد الى الوسط الحسابي.

(6) عند ضرب عدد ثابت في جميع قيم المشاهدات فالتنا نضرب الوسط الحسابي في نفس القيمة.

## 2-3) الوسيط:

نبداً التحدث عن مفهوم الوسيط باعطاء التعريف التالي.

**تعريف:** الوسيط هو عبارة عن القيمة الاوسطية لمجموعة من القيم رُتبت تصاعدياً أو تنازلياً في حالة اذا كان عدد القيم فردية ومتوسط القيمتين الأوسطتين. اذا كان عدد القيم زوجياً.



هذا التمثيل اذا كان عدد القيم مفردة والرتيب تصاعدياً.



## 2-3-1 كيفية إيجاد الوسيط:

### أ) حساب الوسيط من البيانات غير المبوبة.

يوجد حالتان لحساب الوسيط من هذه البيانات.

أ- اذا كان عدد القيم غير المبوبة فردياً.

اذا كان لدينا قيم المشاهدات  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n$  وكانت  $n$  فردية لحساب الوسيط نتبع الخطوات التالية.

- نرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً ولكن ستاؤل في كتابنا الترتيب التصاعدي.

- نجد ترتيب الوسيط من العلاقة:

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{1+n}{2} \text{ حيث } n \text{ عدد القيم.}$$

3- نجد قيمة الوسيط وهي القيمة المناظرة لترتيب الوسيط.

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية 3، 21، 5، 9، 11، 7، 14. اوجد الوسيط لهذه القيم.

الحل: تتبع الخطوات اعلاه

(1) نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً كما في الجدول (2 - 11)

القيمة	3	5	7	9	11	14	21
الترتيب	1	2	3	4	5	6	7

جدول (2 - 11)

ثم نضع ترتيب كل قيمة

$$(2) \text{ نجد ترتيب الوسيط حيث ترتيب الوسيط} = \frac{1+7}{2} = 4 \text{ أي الترتيب الرابع}$$

(3) نجد قيمة الوسيط (و) وهي القيمة التي تناظر الترتيب الرابع والمشار لها بالسهم فيكون قيمة الوسيط و = 9

ب - اذا كان عدد القيم غير المئوية زوجياً.

لايجاد الوسيط لهذه القيم تتبع الخطوات التالية.

(1) نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً.

(2) نجد ترتيب الوسيطين من العلاقة التالية:

ترتيب  $w_1$  ( الوسيط الأول) -  $\frac{n}{2}$  ..... (10-2)

ترتيب  $w_2$  الوسيط الثاني -  $\frac{n}{2} + 1$  أو  $\frac{n+2}{2}$  ..... (11-2)

(3) نجد قيم  $w_1$  و  $w_2$  المناظرة لترتيبيهما.

(4) نجد  $w$  (الوسيط) من العلاقة:

..... (12-2)  $w = \frac{w_1 + w_2}{2}$

مثال: أوجد الوسيط لقيم المشاهدات 20، 18، 11، 29، 15، 25، 7، 3

الحل: نتبع الخطوات التالية.

(1) نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً. ونضع مقابل كل قيمة ترتيبها.

29	25	20	18	15	11	7	3
8	7	6	5	4	3	2	1

(2) نجد ترتيب الوسيطان  $w_1$  و  $w_2$  من العلاقتين السابق ذكرهما، فيكون ترتيب

$w_1 = 4$  أي الرابع، وترتيب  $w_2 = 4 + 1 = 5$  أي الخامس.

(3) نجد القيم المناظرة لترتيبيهما كما هو مشار بالأسهم فيكون قيمة  $w_1 = 15$ ، وقيمة  $w_2 = 18$ .

(4) نجد الوسيط  $w$  للقيم من العلاقة:

$$w = \frac{w_1 + w_2}{2} = \frac{15 + 18}{2} = \frac{33}{2} = 16.5$$

### (ب) حساب الوسيط للبيانات المبوبة.

قبل الخوض في إيجاد الوسيط للبيانات المبوبة وذكر الخطوات لها لابد من التعرف لمفهوم التكرار المتجمع الصاعد والهابط.

تعريف: التكرار المتجمع الصاعد هو اضافة تكرار الفئة(او الفئات) السابقة لتكرار الفئة اللاحقة ويبدأ التكرار المتجمع الصاعد بالصفر وينتهي بمجموع التكرارات الكلي ويعمل جدول متجمع صاعد تتبع الخطوات التالية

- (1) نضيف فئة سابقة في الجدول المعطى تكرارها صفرًا.
- (2) نجد الحدود الفعلية لكل فئة.
- (3) نجد عمود الحدود الفعلية العليا ونسبقها برمز للدلالة على أصغر من.
- (4) نجد عمود التكرارات المتجمعة بحيث يكون تكرار الفئة التي هي اقل من الحد الأدنى المعطى = صفر

تكرار الفئة المتجمعة الاولى = تكرار الفئة الاولى للمعطاة.

تكرار الفئة المتجمعة الثانية= تكرار الفئة الاولى للمعطاة + تكرار الفئة الثانية للمعطاة.

تكرار الفئة المتجمعة الثالثة=تكرار الفئة الاولى للمعطاة+تكرار الفئة الثانية للمعطاة+ الثالثة

⋮  
⋮

تكرار الفئة المتجمعة الاخيرة= مجموع التكرارات جميعها.

والآن نتقل الى كيفية إيجاد الوسيط من البيانات المبوبة.

### ايجاد الوسيط من البيانات المبوبة :

لايجاد الوسيط للبيانات المبوبة تتبع الخطوات التالية:

(1) نضيف للجدول المعطى فئة سابقة تكرارها صفراً.

(2) نجد عمود للفئات الفعلية العلوية.

(3) نجد عمود تكرار المتجمع الصاعد.

(4) نجد ترتيب الوسيط من العلاقة.

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{ك.ر.}}{2} \quad \text{.....(2-13)}$$

(5) نحدد موقع ترتيب الوسيط بين تكرارات المتجمعة الصاعدة ونشير له بسهم.

(6) نجد الفئة الوسيطة بحديها الفعلين الأدنى والأعلى وهي الفئة التي تقع تحت السهم الذي يشير لترتيب الوسيط.

(7) نحدد الحد الأدنى للفئة الوسيطة.

(8) نحدد تكرار المتجمع السابق واللاحق لترتيب الوسيط.

(9) نحدد طول الفئة الوسيطة.

(10) نجد الوسيط من العلاقة:

$$\text{الوسيط} = \text{الحد الأدنى للفئة الوسيطة} + \frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار المتجمع السابق لترتيب الوسيط}}{\text{طول الفئة}} \times \text{طول الفئة} \quad \text{.....(2-14)}$$

مثال : البيانات التالية تمثل الاجور الشهرية لمائة عامل موزعين بالجدول (2-12).

فئات الاجور	69-60	79-70	89-80	99-90	109-100	المجموع
عدد العمال	6	12	47	25	10	100

جدول (2 - 12)

المطلوب : ايجاد مايلي :

(أ) اوجد عدد العمال الذين رواتبهم اقل من 60 دينار.

(ب) اوجد عدد العمال الذين رواتبهم بين 60 واقل من 100 دينار.

(ج) اوجد عدد العمال الذين رواتبهم 80 دينار فأكثر.

(د) اوجد الوسيط لهذه الاجور .

(هـ) اوجد الوسيط بطريقة الرسم.

الحل: (أ) عدد العمال الذين تقل رواتبهم عن 60= صفر.

(ب) عدد العمال الذين رواتبهم بين 60 وأقل من 100 دينار.

$$= 6 + 12 + 47 + 25 = 90 \text{ عاملاً.}$$

(ج) عدد العمال الذين رواتبهم 80 دينار فأكثر =  $47 + 25 + 10 = 82$  عاملاً.

(د) لايجاد الوسيط تتبع الخطوات السابقة ونشكل الجدول (2-13) الذي يشمل جزءاً من الخطوات.

التكرار السابق لترتيب الوسيط

ترتيب الوسيط

التكرار السابق لترتيب الوسيط

**جدول (2-13)**

ثم نتبع الخطوات الاربع التالية:

$$50 = \frac{100}{2} = \text{نجد ترتيب الوسيط} \quad (1)$$

(2) نجد الفئة الوسيطة (79.5 - 89.5)

(3) نجد الحد الأدنى للفترة الوسيطة = 79.5.

(4) تطبيق العلاقة:

$$10 \times \frac{18-50}{18-65} + 79.5 = \text{الوسيط}$$

$$\frac{320}{47} + 79.5 - \frac{10 \times 32}{47} + 79.5 -$$

$$86.31 = 6.81 + 79.5 =$$

ونلاحظ ان قيمة الوسيط وقعت ضمن الفئة الوسيطة ولذا سميت الفئة الوسيطة.



هـ- لاييجاد الوسيط بطريقة الرسم نتبع الخطوات التالية:

(1) نرسم محورين متعامدين المحور الأفقي يمثل الحدود العليا الفعلية والمحور الرأسي يمثل عليه التكرار المتجمع الصاعد.

$$(2) \text{ نجد ترتيب الوسيط} = \frac{100}{2} = 50.$$

(3) نعين النقاط التي احداثها الأول يمثل الفئات الفعلية والاحداثي الثاني يمثل التكرار المتجمع المقابل لها.

(4) نرسم المنحنى المار بهذه النقاط ويسمى المنحنى التكراري المتجمع الصاعد.

(5) نعين ترتيب الوسيط على المحور الرأسي ونقيم عمود من هذه النقطة على المحور الرأسي وموازي للمحور الأفقي يتقاطع مع المنحنى في نقطة.

(6) ننزل من هذه النقطة عمود على المحور الأفقي يتقاطع معه في نقطة تدل على الوسيط.

والآن نقوم برسم المنحنى لتحديد قيمة الوسيط من الرسم.

### رسم المنحنى:

مثال: البيانات التالية تمثل احوار 100 عامل مينة بالجدول (2 - 14).

فئات الأحوار	-80	-90	-100	-110	130-120
التكرار	8	22	41	19	10

جدول (2 - 14)

الحل: نكون جدول الحل (2 - 15)

فئات الأجر	التكرار	فئات أقل > 80	التكرار التجمعي
-80	8	90 >	8
-90	22	100 >	30
-100	41	110 >	71
-110	19	120 >	90
130-120	10	130 >	100
	100		

جدول (2 - 15)

المطلوب: (1) إيجاد الوسيط بالطريقة الحسابية

(2) إيجاد الوسيط بالطريقة البيانية ( الهندسية ) .

$$\text{الحل: (1) ترتيب الوسيط} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

الفترة الوسيطة = 100 - وحدها الأدنى = 100

$$\text{قيمة الوسيط} = 100 + \frac{10}{1} \times \frac{30-50}{30-71}$$

$$= 100 + \frac{10 \times 20}{1 \times 41} = 104.9 = 100 + 4.9$$

(2) إيجاد الوسيط بالطريقة البيانية

- نرسم المنحنى المتجمع الصاعد

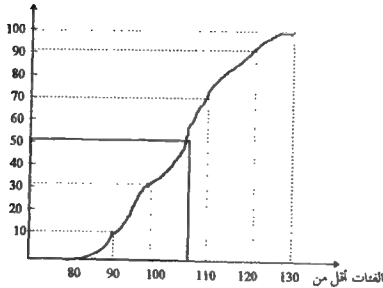
- نجد ترتيب الوسيط

- نقيم عمود ومن نقطة ترتيب الوسيط ليقطع المنحنى في نقطة مثل ن ثم من النقطة ن عمود يقطع محور الفئات في نقطة مثل م فتكون القيمة المقابلة للنقطة م هي

$$\text{قيمة الوسيط} = \frac{\sum_{r=1}^n}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

ترتيب الوسيط:

قيمة الوسيط = 104.9



تعريف: مقاييس اشباه الوسيط: هي مقاييس تشبه الوسيط الا انها لاتعتمد من مقاييس النزعة المركزية ومن هذه المقاييس نذكر منها.

### 2-3-2 خصائص الوسيط

1) الوسيط لا يتأثر بالقيم المتطرفة كما هو الحال في الوسط الحسابي

مثال: اوجد الوسيط لقيم المشاهدات:

.47, 22, 31, 2555, 3, 21, 7

الحل: نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً.

3 7 21 22 31 47 2555

- نجد ترتيب الوسيط  $= \frac{1+7}{2} = 4$  ∴ القيمة الرابعة هي الوسيط

- نأخذ القيمة المناظرة لترتيب الوسيط فنجد ان  $= 22$  نلاحظ ان القيمة المتطرفة 2555 لم تؤثر على قيمة الوسيط.

(2) الوسيط يتأثر بعدد القيم للملاحظات .

مثال: أوجد الوسيط لقيم المشاهدات التالية.

7،11،5،33،19،4،8

الحل: نرتب قيم المشاهدات تصاعدياً

4 5 7 8 11 19 33

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

- نجد ترتيب الوسيط  $= \frac{1+7}{2} = 4$  أي الرابع.

يكون الوسيط مساوي للقيمة المناظرة للترتيب

و  $= 8$

ولو حذفنا المشاهدين 5،4 مثلاً ثم نعيد ترتيب البيانات

7 8 11 19 33

(1) (2) (3) (4) (5)

ونجد الوسيط و  $= 11$  نلاحظ ان الوسيط تغير ولم يبق ثابتاً.

- (3) يأخذ بعين الاعتبار موقع القيم وليس متوسطها.
- (4) يمكن إيجادها من جداول المفتوحة.
- (5) مجموع الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات عن وسيطها اقل من مجموع الانحرافات المطلقة للقيم عن اية قيمة أخرى في حالة البيانات غير المبوبة.
- مثال: اوجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات 14,9,5,11,3 عن وسيط هذه القيم ثم اوجد الانحرافات المطلقة عن القيمة 5.
- الحل: نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً

14	11	9	5	3
(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

الوسيط 9

الانحرافات عن الوسيط المطلقة

$$|ح_1 - 9| = 3 - 9 = -6$$

$$|ح_2 - 9| = 5 - 9 = -4$$

$$|ح_3 - 9| = 9 - 9 = 0$$

$$|ح_4 - 9| = 11 - 9 = 2$$

$$|ح_5 - 9| = 14 - 9 = 5$$

المجموع = 17

الانحرافات المطلقة عن القيمة 5

$$|ح_1 - 5| = 3 - 5 = -2$$

$$ح_2 = |5-5| - 0$$

$$ح_3 = |5-9| - 4$$

$$ح_4 = |5-11| - 6$$

$$ح_5 = |5-14| - 9$$

$$\text{المجموع} = 21$$

نلاحظ ان مجموع الانحرافات عن الوسيط هي اقل من مجموع الانحرافات عن اية قيمة اخرى.

## 2-4) المنينات

### 2-4-1) مفهوم المنين:

ان تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري الى مئة جزء متساو يسمى بالمنينات فالمنين الاول م<sub>1</sub> هو القيمة التي يسبقها 1% من البيانات ويليها 99% من البيانات على فرض ان القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا. والمنين الثلاثون (م<sub>30</sub>) هو القيمة التي يسبقها 30% من البيانات ويليها 70% من البيانات على فرض ان القيم مرتبة ترتيبا تصاعديا.

### 2-4-2) كيفية ايجاد المنينات

أ- اذا كانت البيانات غير مبربة. نتبع الخطوات التالية:-

- نقوم بترتيب المشاهدات ترتيبا تصاعديا.

- نجد ترتيب المنين من العلاقة التالية:-

$$\text{ترتيب المنين المطلوب} = \frac{\text{المنين}}{100} \times (\text{عدد المشاهدات} + 1) \dots (2-15)$$

وبشكل رموز يمكن صياغة العلاقة كما يلي

(16-2).....

$$\text{ترتيب المئين} = \frac{P}{100} \times (1+N)$$

- نجد موقع المئين.

- نجد قيمة المئين المناظرة لموقعه.

مثال: البيانات التالية تمثل الرواتب لسبعة عمال اوجد المئين الاربعين لهذه الرواتب

64، 88، 68، 90، 60، 75، 80

الحل: نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا

القيمة	90	88	80	75	68	64	60
الترتيب	(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

نجد ترتيب م<sub>40</sub> من العلاقة أعلاه:

$$\text{ترتيب م}_{40} = \frac{40}{100} \times (1 + 7) = 3.2$$

$4 \geq 3.2 \geq 3$  أي أن ترتيب م<sub>40</sub> يقع بين الترتيب الثالث والرابع

نجد القيم المناظرة للترتيبين الثالث والرابع وهي 68، 75

$$\therefore \text{قيمة م}_{40} = \frac{75 + 68}{2} = \frac{143}{2} = 71.5$$

وتفسير الجواب ان 40٪ من مجموع الرواتب تقل عن 71.5 دينار و60٪ من

الرواتب تزيد عن 71.5 دينار.

ب) إيجاد المتين لقيم المشاهدات المبوبة

ويتم بطريقتين

(1) الطريقة الحسابية الاولى (2) الطريقة الحسابية الثانية

وخطوات هاتين الطريقتين تشبه تماما الخطوات المتبعة في إيجاد الوسيط لان الوسيط هو عبارة عن متين 50

(1) الطريقة الحسابية الاولى:-

- تشكل جدولاً تكرارياً متجمعاً صاعداً.

$$\text{نجد ترتيب المتين} = \frac{\text{مجموع التكرارات} \times \text{رقم المتين}}{100} \dots\dots\dots (17-2)$$

$$\text{وبصيغة رمزية} = \frac{m}{100} \times \sum_{i=1}^n k_i \dots\dots\dots (18-2)$$

- نحدد موقع ترتيب المتين ونشير اليه بسهم.

- نجد الفئة المتينة وهي الفئة التي تقع اسفل السهم الذي يحدد موقع ترتيب المتين في الفئات المنفصلة. أما في الفئات المتصلة فان السهم يمر بين حديهما.

نجد المتين من العلاقة التالية:-

$$\text{المتين} = \text{الحد الأدنى للفئة المتينة} + \frac{\text{تكرار التجمع الصاعد اللاحق} - \text{تكرار التجمع الصاعد السابق}}{\text{طول الفئة}} \dots\dots\dots (19-2)$$



مثال: البيانات التالية تمثل اطوال 40 طالباً موزعين كما في الجدول (2-16):-

فئات الاطوال	-15	-160	-163	-166	169 - 172
عدد الطلاب	5	7	12	9	7

جدول (2 - 16)

المطلوب: (1) إيجاد مئين (١٢) (2) إيجاد مئين 30 (٣٠)

(3) إيجاد مئين 90 (٩٠%)

الحل: نشكل اولاً جدولاً تكرارياً متجمعا صاعداً (2 - 17).

فئات الاطوال	عدد الطلاب	نهاية الفئات العليا	التكرار المتجمع الصاعد
-157	5	157>	00
-160	7	160>	5
-163	12	163>	12
-166	9	166>	24
169-172	7	169>	33
		172>	40
المجموع	40		

جدول (2 - 17)

نستخرج ترتيب ١٢ =  $40 \times \frac{1}{100} = 0.4$  ونلاحظ هنا بأن ترتيب هو أقل

من التكرار المتجمع الصاعد للفتة الاولى (1) وعلى هذا الاساس لا نستطيع حل السؤال

بهذه الطريقة الا اذا اضفنا فئة سابقة وتكرارها صفر لان ترتيب أي معين لا بد ان يكون له تكرار متجمع صاعد سابق وتكرار متجمع صاعد لاحق.

الفئة المثنية م<sub>1</sub> = 157 واقل من 160

الحد الادنى = 157

طول الفئة المثنية = 157 - 160

التكرار السابق = 0 والتكرار اللاحق = 5 وبتطبيق القاعدة اعلاه نجد م<sub>1</sub> من العلاقة

$$\therefore \text{قيمة م}_1 = 157 + 3 \times \frac{-0.4}{-5} = 157.24 - 0.24 = 157$$

(2) إيجاد المثين 30 (م<sub>30</sub>%)

بالاعتماد على الجدول السابق

$$\text{نجد ترتيب المثين } 30 = 40 \times \frac{30}{100} = 12$$

وفي هذه الحالة نلاحظ بأن ترتيب المثين جاء مطابقا لاحد التكرارات المتجمعة الصاعدة وهو 12 فان م<sub>30</sub> في هذه الحالة يساوي نهاية الفئة المناظرة للتكرار المتجمع الصاعد (12) = 163.

(3) إيجاد مثين 90 (م<sub>90</sub>%)

بناء على المعلومات الموجودة في الجدول اعلاه

$$\text{نجد ترتيب المثين } 90 = 40 \times \frac{90}{100} = 36$$

الفئة المثنية = 169 واقل من 172 وحدها الادنى 169

طول الفئة - 172 - 169 = 3

التكرار المتجمع الصاعد السابق = 33

التكرار المتجمع الصاعد اللاحق = 40

$$-90 = 169 + \frac{33 - 36}{33 - 40} \times 3 = 169 + 3 \times \frac{3}{7}$$

$$170.282 = 169 + \frac{9}{7}$$

- إيجاد المتين بالطريقة الحسابية الثانية:

ان الخطوات لهذه الطريقة تتطابق تماما مع الخطوات المستخدمة في الطريقة الحسابية الثانية لإيجاد الوسيط لان الوسيط هو متين 50.

مثال: باستخدام البيانات الواردة في المثال اعلاه اوجد ما يلي:-

$$(1) \quad 1\% \quad (2) \quad 90\%$$

الحل: لإيجاد 1% تتبع ما يلي:-

$$(1) \quad \text{نجد ترتيب } 1\% = 40 \times \frac{1}{100} = 0.4 \text{ ثم نحدد الموقع}$$

الفئة المتينة      التكرار المتجمع الصاعد

$$3 \left[ \begin{array}{c} 157 \\ 1 \\ 163 \end{array} \right] \text{ س} \quad 0.4 \left[ \begin{array}{c} 0 \\ 0.4 \\ 5 \end{array} \right] 5$$

$$\frac{04}{5} - \frac{12}{5} = \text{س} \therefore 1.2 = 5 - \text{س} = 0.24$$

∴ متين<sub>1</sub> (م) = الحد الأدنى للفة المتينة + قيمة م = 157 + 0.24 = 157.24

$$160.3 = 0.3 + 160 =$$

(2) إيجاد متين 90

التكرار للتجمع الصاعد

الفة المتينة

$$7 \begin{bmatrix} 33 \\ 36 \\ 40 \end{bmatrix} 3$$

$$3 \begin{bmatrix} 169 \\ 90م \\ 172 \end{bmatrix} 3$$

$$\frac{3}{7} = \frac{م}{3} \text{ نضرب ضربا تبادليا فنجد أن } 7م = 9 \Rightarrow م = \frac{9}{7} = 1.28$$

$$\therefore 90م = 169 + 1.28 = 170.28$$

تفسير نتيجة م<sub>1</sub> = 157.24 ان 1% من اطوال الطلاب تقل عن 157.24 وان

99% من الطلاب تزيد اطوالهم عن 157.24

تفسير نتيجة م<sub>90</sub> ان 90% من الطلاب تقل اطوالهم عن 170.28 وان 10% من

الطلاب تزيد اطوالهم عن 170.28

## 2-4-3) الترتيب المتيني؛

نود أن نقارن بين المتين والترتيب المتيني. لو فرضنا انه يوجد لدينا جدول

تكراري يحتوي على اطوال لعدد من الطلاب ونفترض اننا قمنا باستخراج المتين

80 وحصلنا على قيمة رقمية هي 168.9 وتفسير هذه القيمة ان 80% من الطلاب تقل

اطوالهم عن 168.9 وان 20% منهم تزيد اطوالهم عن 168.9 ولو فرضنا ان طالبا طوله

170 سم وطلب الينا ان نجد نسبة الطلاب الذين تقل اطوالهم عن هذه

القيمة (170سم) فانه لابد من استخراج الترتيب المتيني

مثال : البيانات التالية تمثل الاجور الاسبوعية لـ (40) عاملا أوجد نسبة العمال الذين

تقل اجورهم عن 17 دينار

فئات الاجور	-12	-14	-16	20-18
عدد العمال	15	13	10	2

الحل : نشكل الجدول التالي:

فئات الاجور	عدد العمال	التكرار المتجمع الصاعد
-12	15	15
-14	13	28
-16	10	38
20-18	2	40

نجد الترتيب المثبني من العلاقة التالية:

$$(20 - 2) \dots\dots\dots \boxed{ق = ح + \frac{\frac{ك}{100} \times ج - د}{ف} \times ل}$$

حيث

ق - القيمة المعطاة والمراد استخراج الترتيب المثبني لها وفي المثال اعلاه ق=17

ح - الحد الادنى للفتة التي تقع فيها القيمة المعطاة

$\frac{ك}{100}$  - الترتيب المثبني

ج - مجموع التكرارات

س- التكرار المتجمع الصاعد للفئة التي تسبق الفئة التي تقع فيها القيمة المعطاة

ف- التكرار العادي التي تقع فيها القيمة

ل- طول الفئة.

الحل: نطبق العلاقة أعلاه.

$$10 = 16 + 2 \times \frac{(28 - 40 \times \frac{ك}{100})}{10}$$

$$170 = 160 + 2 \times (28 - \frac{40ك}{100})$$

$$170 = 160 + 56 - \frac{80ك}{100}$$

$$17000 = 16000 + 5600 - 80ك$$

$$17000 - 16000 - 5600 = -80ك$$

$$80ك = 6600$$

$$ك = \frac{6600}{80} = 82.5\%$$

وتفسر هذا الجواب ان 82.5 من مجموع العمال تقل اجورهم عن 17 دينار.

مثال: البيانات التالية تمثل اوزان 50 طالبا موزعة كما هو في الجدول (2-18) والمطلوب إيجاد نسبة الطلاب الذين تقل اوزانهم عن 68 كغم.

فئات الاوزان	54-50	59-55	64-60	69-65	74-70	المجموع
عدد الطلاب	10	12	8	14	6	50

جدول (2 - 18)

الحل: نكون جدول الحل (2 - 19).

فئات الاوزان	عدد الطلاب	الحدود الفعلية	التكرار المتجمع الصاعد
54-50	10	54.5-49.5	10
59-55	12	59.5-54.5	22
64-60	8	64.5-59.5	30
69-65	14	69.5-64.5	44
74-70	6	74.5-69.5	50
المجموع	50		

جدول (2 - 19)

ثم بتطبيق العلاقة أعلاه:

$$5 \times \frac{30-50 \times \frac{ك}{100}}{4} + 64.5 = 68$$

$$5 \times \left( 30 - \frac{50ك}{100} \right) + 903 = 952$$

$$150 - \frac{250ك}{100} + 903 = 952$$

$$-95200 = 90300 + 250ك - 15000$$

$$-95200 = 90300 + 250ك - 15000$$

$$-95200 = 90300 + 250ك - 15000$$

$$-95200 = 90300 + 250ك - 15000$$

$$ك = \frac{19900}{250} = 79.6\%$$

## 2-4-4) الربيعات

ان مفهوم الربيعات هو تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري الى اربعة اجزاء متساوية يسمى بالربيعات ويوجد ثلاثة ربيعات مرتبة من اليسار الى اليمين وهي الربيع الاول او الربيع الادنى او 25م والربيع الثاني او الوسيط او 50م والربيع الثالث او الربيع الاعلى او 75م وعلى فرض ان البيانات مرتبة ترتيبا تصاعديا فاننا نعرف كل ربيع على حده.

تعريف: الربيع الاول هو القيمة التي يسبقها ربع البيانات ويلها ثلاثة ارباع البيانات. وسنرمز له بالرمز 1.

تعريف: الربيع الثاني هو القيمة التي يسبقها نصف البيانات ويلها النصف الآخر. وسنرمز له بالرمز 2.

تعريف: الربيع الثالث هو القيمة التي يسبقها ثلاثة ارباع البيانات ويلها ربع البيانات. وسنرمز له بالرمز 3.

والربيعات هي من أشباه مقاييس النزعة المركزية ويمكن إيجادها:

أ- من البيانات غير المبوبة (المفردة) ومن أمثلتها:

1- إيجاد الربيع الادنى (الاول) نتبع الخطوات التالية:

- نرتب البيانات ترتيبا تصاعديا.

- نجد ترتيب الربيع الادنى من العلاقة التالية:

$$(1+n) \frac{25}{100} = 25م$$



- نجد موقع ترتيب الربيع الأدنى بين الترتيب.
- نجد القيم المناظرة للترتيب التي تحصر ترتيب الربيع الأدنى.
- نجد قيمة الربيع الأدنى من العلاقة.
- قيمة الربيع الأدنى = المتوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين اللتين تحصران الربيع الأدنى.
- الربيع الثاني (الوسيط) (50م) يمكن إيجاده كما مر في الوسيط.
- إيجاد الربيع الثالث أو م أو 75 أو الربيع الأعلى وتنبع الخطوات التالية:

(1) نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً.

(2) نجد ترتيب الربيع الثالث من العلاقة.

$$\text{ترتيب الربيع الثالث (75م)} = \frac{75}{100} (1+n)$$

(3) نحدد موقع ترتيب الربيع الثالث من بين الترتيب للقيم.

(4) نجد القيم المناظرة للترتيب التي تحصر الربيع الثالث.

(5) نجد قيمة الربيع الثالث من العلاقة.

قيمة الربيع الثالث = المتوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين اللتان تحصران الربيع الأعلى.

مثال: البيانات التالية تمثل علامات ستة طلاب من عشرة درجات 5،6،8،7،1،9  
أوجد مايلي :

(1) الربيع الأدنى مع تفسير النتيجة.

(2) الربيع الأعلى مع تفسير النتيجة.

الحل: (1) الربيع الأدنى

- نرتب البيانات تصاعديا على النحو التالي

10	9	8	7	6	5
(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

- ترتيب الربع الأدنى =  $\frac{25}{100} - (1+n) \frac{1}{4} - (1+6) \frac{1}{4} - 7 \times \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 1.75$

- نحدد الموقع  $2 > 1.57 > 1$

- نجد القيم المناظرة للترتيب الاول والثاني وهي على التوالي 5.6

$$\text{الربع الأدنى} = \frac{6+5}{2} = \frac{11}{2} = 5.5$$

- ومعنى هذه النتيجة ان 25٪ من الطلبة تقل علاماتهم عن 5.5 وان 75٪

من الطلبة تزيد علاماتهم عن 5.5

(2) لايجاد الربع الاعلى

$$\text{نجد ترتيب الربع الاعلى} = \frac{75}{100} - (1+n) \frac{3}{4} - (1+6) \frac{3}{4} - 7 \times \frac{3}{4} = \frac{21}{4} = 5.25$$

نحدد موقع ترتيب المئين

$5.25 > 5.6$  أي ترتيب الربع الاعلى يقع بين الترتيبين الخامس والسادس

نجد الارقام المناظرة للترتيب الخامس والسادس وهي على التوالي 9، 10

$$\therefore \text{الربع الاعلى} = \frac{10+9}{2} = \frac{19}{2} = 9.5 \text{ وتفسير النتيجة كما يلي}$$

أي ان 75٪ من الطلاب علاماتهم تقل عن 9.5 وان 25٪ من الطلاب

علاماتهم تزيد عن 9.5.

ب) إيجاد الربيعات من البيانات المبوبة

ويمكن إيجادها بطريقتين

(1) الطريقة الحسابية (2) الطريقة البيانية

(1) الطريقة الحسابية

وتقسم الى طريقتين:

(1) الطريقة الحسابية الاولى (2) الطريقة الحسابية الثانية

ان الخطوات المتبعة لهاتين الطريقتين هي نفس الخطوات المتبعة لهاتين الطريقتين في كل من الوسيط والمتينات ولذلك لاداعي لذكرها مرة أخرى.

مثال: البيانات التالية تمثل الانفاق الشهري لعشر اسر موزعة كما في الجدول (2-20):

فئات الانفاق الشهري	79-70	89-80	99-90	109-100
عدد الاسر	2	3	1	4

جدول (2 - 20)

المطلوب إيجاد مايلي:

أ) إيجاد الربيع الادنى بالطريقة الحسابية الاولى والثانية.

ب) إيجاد الربيع الاعلى بالطريقة الحسابية الأولى والثانية.

ج) إيجاد الربيع الادنى والاعلى بالطريقة البيانية

الحل: أ) إيجاد الربيع الادنى بالطريقة الحسابية الاولى والحسابية الثانية

نشكل جدول تكراري متجمع صاعد (2 - 21)

فئات الانفاق	عدد الاسر	الفئات الفعلية	نهاية الفئات	تكرار المتجمع صاعد
60-69	∴	59.5-69.5	69.5>	∴
70-79	2	69.5-79.5	79.5>	2
80-89	3	79.5-89.5	89.5>	5
90-99	1	89.5-99.5	99.5>	6
100-109	4	99.5-109.5	109.5>	10
المجموع	10			

جدول (2 - 21)

نجد ترتيب الربيع الأدنى  $= \frac{25}{100} \times \text{مجموع التكرارات}$

$$= \frac{25}{100} \times 10 = 2.5$$

فئة الربيع الأدنى وهي التي تقع أسفل السهم مباشرة = 79.5-89.5

الحد الأدنى للفئة الربيعية = 79.5

طول الفئة الربيعية = 89.5-79.5 = 10

التكرار المتجمع السابق = 2

التكرار المتجمع اللاحق = 5

إيجاد الربيع الأدنى حسب العلاقة.

$$\text{الربيع الأدنى} = 79.5 + \frac{2-25}{2-5} \times 10$$

$$= 79.5 + 10 \times \frac{05}{3} = 79.5 + \frac{5}{3} = 79.5 + 1.67 = 81.17$$

إيجاد الربيع الأدنى بالطريقة الحسابية الثانية

بالاعتماد على الجدول المشكل اعلاه نكتب العمودين التاليين:

التكرار المتجمع الصاعد	الفئة الربيعية
$3 \begin{bmatrix} 2 \\ 2.5 \\ 5 \end{bmatrix} 0.5$	$10 \begin{bmatrix} 79.5 \\ \text{الربيع الأدنى} \\ 89.5 \end{bmatrix} \text{ س}$
	$\frac{0.5}{3} = \frac{\text{س}}{10}$

نتيجة للضرب التبادلي فإن  $3 \times \text{س} = 5$   $\Rightarrow \text{س} = 1.67$

الربيع الأدنى = الحد الأدنى للفئة الربيعية + قيمة س

$$81.17 = 1.67 + 79.5$$

(2) إيجاد الربيع الأعلى بالطريقة الحسابية الأولى والثانية

إيجاده بالطريقة الأولى

$$\text{نجد ترتيب الربيع الأدنى} = \frac{75}{100} \times 10 - \frac{750}{100} = 7.5$$

الفئة الربيعية =  $99.5 - 109.5$

الحد الأدنى =  $99.5$

$$\text{طول الفئة} = 109.5 - 99.5 = 10$$

التكرار المتجمع الصاعد السابق =  $6$

التكرار المتجمع الصاعد اللاحق =  $10$

نجد الربيع الأعلى من العلاقة التالية:

$$\text{الربيع الأعلى} = \frac{6 - 7.5}{6 - 10} + 99.5 = 10 \times \frac{1.5}{4} + 99.5$$

$$103.25 = 3.75 + 99.5 - \frac{15}{4} + 99.5 =$$

إيجاد الربيع الاعلى بالطريقة الحسابية الثانية

بالاعتماد على الجدول المشكل اعلاه نكتب العمودين التاليين:

التكرار المتجمع الصاعد

الفئة الربيعية

$$4 \begin{bmatrix} 6 \\ 7.5 \\ 10 \end{bmatrix} 15 \quad \text{س} \quad \begin{bmatrix} 99.5 \\ \text{الربيع الاعلى} \\ 109.5 \end{bmatrix} 10$$

$$\frac{15}{4} = \frac{\text{س}}{10}$$

بالضرب التبادلي  $4\text{س} = 15$

$$\text{س} = \frac{15}{4} = 3.75$$

الربيع الاعلى = الحد الادنى للفئة الربيعية + قيمة س

$$103.25 = 99.5 + 3.75 =$$

ب- طريقة إيجاد الربيع الادنى والاعلى بيانيا

وهذا هو المطلوب (3) من مطالب السؤال السابق وتتبع الخطوات التالية:

- نرسم محورين متعامدين . ثم نرصد على المحور الافقي الحدود العليا للفئات وعلى

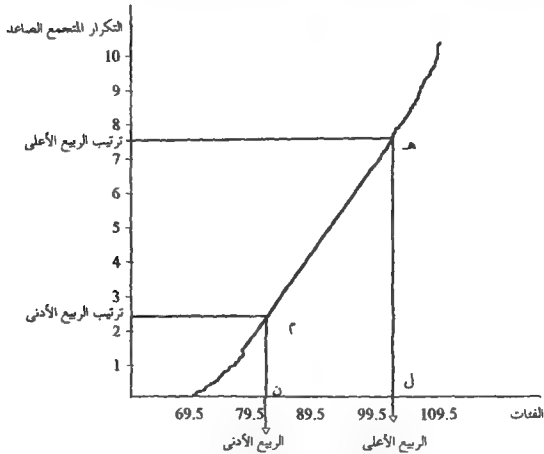
المحور الرأسي التكرارات المتجمعة الصاعدة.

- نعين النقاط التي احداثيتها الاول يمثل الفئات والاحداثي الثاني يمثل التكرار.

- نصل بين النقاط المعينة بخط منحني فيتكون لدينا منحنى تكراري متجمع صاعد.

- نحدد ترتيب الربيع الادنى ثم نعيه على المحور الرأسي ونقيم من نقطة التعيين عموداً

- على المحور الرأسي فيقطع المنحنى في نقطة مثل م.
- نزل من النقطة م عموداً على المحور الأفقي فيقطعه في نقطة فيتمعين عندها قيمة الربيع الأعلى وفي مثالنا نجد من الرسم ان قيمة الربيع الأدنى هي 81.17 وقيمة الربيع الأعلى هو 103.25 تقريباً انظر الى الشكل (2 - 1)



شكل (2 - 1)

## 2-4-5) العشرات:

مفهوم العشرات: هو تقسيم مساحة المنحنى لتوزيع تكراري الى عشرة اقسام متساوية وكل قسم يسمى عشر. فمثلا العشر الثالث هو القيمة التي

يسبقها  $\frac{3}{10}$  البيانات ويلبها  $\frac{7}{10}$  من البيانات على فرض أن القيم مرتبة ترتيباً تصاعدياً. والوسيط هو العشير الخامس ويوجد تسعة عشيرات.

أما كيفية إيجاد العشيرات فيمكن صياغتها كما يلي:-

أ- البيانات غير المبوبة: تتبع الخطوات التالية:

- نرتب البيانات تصاعدياً

- نجد ترتيب العشير

- نحدد الترتيب الأدنى والرتيب الأعلى لترتيب العشير

- نجد القيم المناظرة للترتيبين

- فيكون العشير هو الوسط الحسابي للقيمتين المناظرتين

مثال: البيانات التالية تمثل علامات 8 طلاب من 50 في مادة الاحصاء

41، 32، 46، 28، 36، 20، 35، 23

والمطلوب إيجاد:

(1) العشير الثالث مع تفسير النتيجة

(2) العشير الثامن مع -تفسير النتيجة- الحل:

الحل: (1) لإيجاد العشير الثالث نتبع الخطوات التالي:

- نرتب البيانات ترتيباً تصاعدياً

القيم. 46 41 36 35 32 28 23 20

الترتيب (1). (2). (3). (4). (5). (6). (7). (8).



$$\text{ترتيب العشير الثالث} = \frac{30}{100} - (1+n) \frac{30}{100} - (1+8) \frac{30}{100} - 9 \times \frac{30}{100} - \frac{270}{100} = 2.7$$

$2 > 2.7 > 3$  ترتيب العشير الثالث يقع بين الترتيب الثاني والثالث

نجد القيمتين المناظرتين للترتيب الثاني والثالث وهما على التوالي 28، 23

$$\therefore \text{العشير الثالث} = \frac{28+23}{2} = \frac{51}{2} = 25.5$$

تفسير النتيجة (25.5) أي أن 30٪ من عدد الطلاب تقل علاماتهم عن 25.5 وأن

70٪ من عدد الطلاب تزيد علاماتهم على 25.5

**وليجاد العشير الثامن:**

نستفيد من ترتيب البيانات في التمرين السابق

ترتيب العشير الثامن =

$$72 = \frac{720}{100} = 9 \times \frac{80}{100} = (1+8) \frac{80}{100} = (1+n) \frac{80}{100}$$

$7 > 7.2 > 8$  نلاحظ أن ترتيب العشير الثامن يقع بين الترتيب السابع والثامن.

نجد القيمتين المناظرتين للترتيبين السابع والثامن وهما على التوالي 46، 41

$$\text{العشير الثامن} = \frac{46+41}{2} = \frac{87}{2} = 43.5$$

تفسير النتيجة (43.5) أي أن 80٪ من الطلاب علاماتهم تقل عن 43.5 و 20٪ من

الطلاب علاماتهم تزيد عن 43.5

**ب) العشيرات للبيانات المبوبة**

وتوجد بطريقتان

1- الطريقة الحسابية الأولى      2- الطريقة الحسابية الثانية

وخطوات هاتين الطريقتين متطابقة تماما مع الخطوات لهاتين الطريقتين في كل من الوسيط، والمتين، والربيعات.

مثال: - أوجد العشير الثالث للبيانات المبوبة في الجدول (2 - 22)

الفئات	6-4	9-7	12-10	15-13	المجموع
التكرار	3	4	6	5	18

جدول (2 - 22)

الحل: لايجاد العشير الثالث نتبع الخطوات التالية:

- نشكل جدول الحل (2 - 23)

الفئات	التكرار	الحدود الفعلية	نهاية الفئات العليا	التكرار المتجمع الصاعد
6-4	3	6.5-3.5	6.5 >	3
9-7	4	9.5-6.5	9.5 >	7
12-10	6	12.5-9.5	12.5 >	13
15-13	5	15.5-12.5	15.5 >	18

جدول (2 - 23)

$$- \text{ترتيب العشير الثالث (30م)} = 18 \times \frac{30}{100} = 5.4 \approx 5$$

الفئة العشرية = 6.5-9.5

الحد الأدنى للفئة العشرية 6.5

طول الفئة العشرية = 9.5-6.5 = 3

التكرار المتجمع السابق = 3

التكرار المتجمع اللاحق=7

نطبق العلاقة التالية:

ترتيب العشر - التكرار للتجمع السابق لترتيب العشر

= الحد الأدنى للفئة العشرية + طول الفئة

التكرار للتجمع اللاحق لترتيب العشر - التكرار للتجمع السابق لترتيب العشر

$$8.3 = 1.8 + 6.5 = \frac{7.2}{4} + 6.5 = \frac{2.4}{4} + 6.5 = 3 \frac{3-5.4}{3-7} + 6.5$$

إيجاد العشر الثالث 300 بالطريقة الحسابية الثانية

بناء على الجدول المشكل اعلاه نقوم بكتابة العمودين التاليين:

التكرار المتجمع الصاعد

الفئة العشرية

$$4 \begin{bmatrix} 3 \\ 5.4 \\ 7 \end{bmatrix} 2.4 \quad \text{س} \quad \begin{bmatrix} 6.5 \\ \text{الثالث} \\ 9.5 \end{bmatrix} 3$$

$$\frac{2.4}{4} = \frac{3}{3}$$

بالضرب التبادلي نحصل على 4=7.2

$$1.8 = \frac{7.2}{4}$$

العشر الثالث = الحد الأدنى للفئة العشرية + قيمة س

$$8.3 = 1.8 + 6.5 =$$

وتفسير النتيجة (8.3) هي أن 30% من مجموع البيانات تقل عن 8.3 و 70% من البيانات تزيد على هذه القيمة.

## 2- (5) المنوال :

تعريف: المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً أو شيوعاً بين قيم المجموعة.

### 2- (1-5) طرق إيجاد المنوال :

أ- إيجاد المنوال للبيانات الغير المبوبة.

(1) اذا لم يتكرر اياً من القيم فلا يوجد منوالاً

مثال: لدينا قيم المشاهدات 7، 9، 11، 12، 15 أوجد منوال هذه القيم .

الحل: لا يوجد منوال لهذه القيم حيث ان اياً من القيم لم تتكرر.

(2) اذا تكرر أحدها فيكون هناك منوالاً واحداً.

مثال: اوجد المنوال لقيم المشاهدات التالية 7، 11، 5، 7، 11، 9، 7

الحل: القيمة الأكثر تكراراً هي القيمة 7.

اما اذا كان لقيمتين نفس العدد من التكرار فيكون للقيم منوالان وهكذا يزداد المنوالات بزيادة العدد المتساوية التكرار على ان يبقى ولو على الاقل قيمة واحدة غير متكررة من بين القيم.

مثال: اوجد المنوال او المنوالان لقيم المشاهدات التالية

11، 4، 9، 17، 9، 4

الحل: يوجد منوالان هما 4، 9 لان لهما نفس التكرار

إيجاد المنوال للقيم المبوبة

لايجاد المنوال هناك طريقتان

أ) الطريقة الجبرية

ب) الطريقة الهندسية.

نبدأ بالطريقة الجبرية وهذه تقسم الى قسمين

### 1) طريقة الفروق لبيرسون.

تتبع الخطوات التالية.

- نجد الفئة المتوالية وهي الفئة التي تقابل الأكثر تكراراً من بين الفئات.
- نجد الفرق بين تكرار الفئة المتوالية والفئة السابقة لها وليكن  $f_1$
- نجد الفرق بين تكرار الفئة المتوالية والفئة اللاحقة لها وليكن  $f_2$
- نجد المتوال من العلاقة التالية.

$$\text{المتوال} = \frac{\text{الحد الأدنى للفئة المتوالية} + \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times (\text{طول الفئة المتوالية})}{1}$$

مثال: البيانات التالية تمثل الدخل الشهري لمائة أسرة موزعة كما في الجدول (2-24).

فئات الدخل	99-0	109-100	119-110	129-120	139-130	المجموع
عدد الأسر	15	25	37	13	10	100

جدول (2-24)

والمطلوب إيجاد المتوال بطريقة الفروق (بيرسون)

الحل: يمكن تكوين الجدول (2-25) والمحتوى على الفئات الفعلية.

فئات الدخل	تكرار الفئة
99.5-89.5	15
109.5-99.5	25
119.5-109.5	37
129.5-119.5	13
139.5-129.5	10
المجموع	100

الفئة المتوالية التي تقابل الأكثر تكراراً

جدول (2-25)

- نجد الفئة المتوالية وهي 109.5-119.5

نجد الحد الأدنى للفئة المتوالية- 109.5

$$\text{نجد } f_1 = 37 - 25 - 12$$

$$\text{نجد } f_2 = 37 - 13 - 24$$

نجد المتوال من العلاقة السابقة.

$$\text{المتوال} = 109.5 + \frac{12 \times 10}{36 + 12}$$

$$= 109.5 + 10 \times \frac{12}{48} = \frac{120}{48} + 109.5$$

$$= 109.5 - 2.5 + 112$$

(2) طريقة الرافعة

وفي هذه الطريقة تتبع الخطوات التالية.

نحدد الفئة المتوالية وهي التي تقابل الأكثر تكراراً.

نجد الحد الأدنى للفئة المتوالية.

نجد ك<sub>1</sub>: التكرار السابق لتكرار الفئة المتوالية.

نجد ك<sub>2</sub>: التكرار اللاحق لتكرار الفئة المتوالية.

نطبق العلاقة التالية.

$$\text{المتوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المتوالية} + \frac{2 \times \text{طول الفئة}}{ك_1 + ك_2}$$

مثال: اوجد المتوال بطريقتين

(أ) بطريقة الفروق.

(ب) بطريقة الرافعة

للبينانات المبوبة بالجدول (2 - 26).

الفئات	-20	-25	-30	-35	-40	المجموع
التكرار	3	12	31	10	4	65

جدول (2 - 26)

الحل: نكون الجدول التالي بشكل رأسي (2 - 27).

الفئات	التكرار
-20	3
-25	12
-30	31
-35	10
-40	4
المجموع	60

أ- بطريقة الفروق

- نجد الفئة المتوالية = 30

- نجد الحد الأدنى للفئة المتوالية = 30

- نجد  $F_1 = 31 - 12 - 19$

- نجد  $F_2 = 31 - 10 - 21$

- نجد المتوال من العلاقة.

$$\text{المتوال} = 30 + \frac{19}{21+19} \times 5$$

$$\frac{95}{40} + 30 = 5 \times \frac{19}{40} + 30 =$$

$$32.375 - 2.375 + 30 =$$

ب- المتوال بطريقة الرافعة

- نجد الفئة المتوالية=30

- نجد الحد الأدنى للفئة المتوالية= 30

- نجد  $K_1 = 12$

- نجد  $K_2 = 10$

- نطبق العلاقة التالية.

$$\text{المتوال} - \text{الحد الأدنى للفئة المتوالية} + \frac{K_2}{K_1 + K_2} \times L$$

$$\text{المتوال} - 30 + \frac{10}{12 + 10} \times 50 = 32.27 = 2.27 + 30 = \frac{50}{22}$$

### خصائص المتوال.

1- لا يتأثر بالقيم المتطرفة.

مثال: اوجد المتوال لقيم المشاهدات التالية 3،5،7،3،27،90،5،3.

الحل: المتوال= 3 وهذا يعني ان المتوال لم يتأثر بالقيم المتطرفة .

2- يوجد بسهولة لانه من التعريف هو القيمة الأكثر تكراراً

3- يمكن إيجادها من الجداول المفتوحة.

4- يمكن إيجادها بالرسم كما ذكرنا في الطريقة الثالثة لإيجادها.



### العلاقة الخطية بين الوسط الحسابي والوسيط والمنوال.

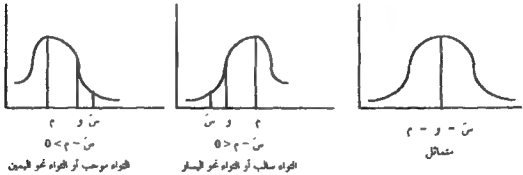
(1) في التوزيعات وحيدة المنوال والمتنوية التواء بسيطاً وإلى الجهة اليمنى فان ترتيب المقاييس يكون

المنوال - الوسيط - الوسط الحسابي كما هو موضح في الشكل (2-4).

(2) في التوزيعات وحيدة المنوال والمتنوية التواءاً بسيطاً وإلى الجهة اليسرى فان ترتيب المقاييس يكون الوسط الحسابي - الوسيط - المنوال كما في شكل (2-3) وبصيغة رموز

$$\bar{x} = w = m$$

(3) في التوزيعات وحيدة المنوال والمتماثلة فان الوسط الحسابي والمنوال والوسيط تنطبق على بعضها البعض كما في الشكل (2-2).



شكل (2-4)

شكل (2-3)

شكل (2-2)

ونستطيع ان نخرج بالعلاقات الخطية التالية التي تربط المقاييس الثلاث ببعضها ببعض.

1- اذا كان التوزيع متماثلاً فان العلاقة التي تربط المقاييس الثلاث

.....(2-21)

الوسط الحسابي - الوسيط - المنوال

2- إذا كان التوزيع غير متمائل فإن العلاقة التي تربط المقاييس الثلاث هي:

$$\text{الوسط الحسابي} - \text{المتوال} = 3(\text{الوسط الحسابي} - \text{الوسيط}) \quad (22-2) \dots\dots\dots$$

$$\text{أي } \bar{x} - m = 3(\bar{x} - y) - \frac{3}{2}(y - m) \text{ وكذلك } \bar{x} - \frac{3}{2}(y - m) = \frac{3}{2}(m - y) \quad (23-2) \dots\dots\dots$$

مثال : إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع غير متمائل هو 50 وكان الوسيط لهذا التوزيع هو 60 أوجد المتوال لهذا التوزيع.

الحل: من العلاقة أعلاه

$$50 - m = -30 \Rightarrow m = -30 + 50 = 20$$

### أمثلة إضافية على المتوال

مثال: أوجد المتوال إن أمكن لقيم المشاهدات التالية.

$$13, 12, 10, 19, 7$$

الحل: لا يوجد متوال لهذه المشاهدات لأن أيا من القيم لم يتكرر.

مثال: أوجد المتوال إن أمكن لقيم المشاهدات التالية.

$$17, 19, 17, 25, 25, 10, 19, 17$$

الحل: المتوال = 17 لأن هذا الرقم له أكبر تكرار

مثال: أوجد المتوال أو المتوالات لقيم المشاهدات التالية:

$$11, 19, 11, 19, 17, 7$$

الحل: يوجد متوالان هما 19، 11.

مثال: اوجد المتوسط ان امكن لقيم المشاهدات التالية.

20،17،15،20،17،15

الحل: لا يوجد متوسط لان جميع القيم لها نفس التكرار.

مثال: البيانات التالية تمثل اجور 100 عامل مينا كما في الجدول (2 - 28):-

الفتات	التكرار
-70	8
-80	22
-90	40
-100	25
-110	5
	100

جدول (2 - 28)

المطلوب: ايجاد المتوسط:

أ) بطريقة الفروق

ب) بطريقة الرافعة

ج) بطريقة المتوسط التقريري.

الحل: أ) طريقة بيرسون

$$1 - \text{ف}_1 = 22 - 40 = 18$$

$$2 - \text{ف}_2 = 25 - 40 = 15$$

الفئة المتوسطة = -90 - وحدها الأدنى = -90

$$\text{قيمة المنوال} = 90 + 10 \times \frac{18}{15+18} = 90 + \frac{180}{33}$$

$$95.45 = 5.45 + 90 =$$

(ب) طريقة الرافعة

$$\text{قيمة المنوال} = 90 + 10 \times \frac{25}{22+25}$$

$$95.32 = 5.32 + 90 = \frac{250}{47} + 90 =$$

$$\text{ج) المنوال التقريبي} = \frac{100+90}{2} = \frac{190}{2} = 95$$

مقال: اذا كان الوسط الحسابي = 45 لقيم من المشاهدات وكان الوسيط لها = 32 أوجد المنوال لها.

الحل: من العلاقة أعلاه نجد أن:

$$45 - م = 3(45 - 32)$$

$$45 - م = 39 - 135$$

$$45 - م = 39$$

$$45 - 39 = م$$

$$6 = م$$

مقال: اذا كانت مجموعة من المشاهدات تتوزع توزيعاً طبيعياً متماثلاً وسطه الحسابي = 36 أوجد المنوال لهذه المشاهدات.

الحل: التوزيع متماثل.

$$\therefore م = و = م = 36$$

ب- الطريقة الهندسية:

وهنا نتبع الخطوات التالية.

- نرسم محورين متعامدين المحور الافقي يمثل الفئات الفعلية والمحور الرأسي يمثل التكرارات.
- نرسم المستطيل الذي قاعدته الفئة المنوالية وارتفاعه الاكثر تكراراً
- نرسم مستطيل يلاصق المستطيل الاول ويسبقه بحيث ان قاعدته الفئة السابقة للفئة المنوالية وارتفاعه يقابل تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالي.
- نرسم مستطيل ملاصق وقاعدته الفئة اللاحقة للفئة المنوالية وارتفاعه تكرار الفئة اللاحقة.
- نصل أ مع د كما في الشكل ثم ب مع ج فيتقاطع الخطان في ن.
- ننزل عمود من ن على المحور الافقي فيتقاطع معه في م فتكون القيمة المناظرة للنقطة هي قيمة المنوال

## 2-6) أثر التحويلات الخطية على مقياس النزعة المركزية.

التحويل الخطي: هو اعطاء صورة جديدة لمفهوم سابق وفق علاقة ولعل مقاييس النزعة المركزية من بين القيم التي تأخذ اوضاعا جديدة فيما اذا وقعت تحت تأثير تحويل وما تتأثر تأثيرا مباشراً.

مما حدا بنا الى وضع قيمتين لكل مقياس من هذه المقاييس القيم قبل خضوعها لتحويل ما والقيمة الثانية هي قيمة المقياس بعد تعرضه لهذا التحويل.

نظرية: ليكن س، و، وم، م٪ تمثل المقاييس على التوالي الوسط الحسابي، المنوال، التين واذا كان ق(س)=-أس+ب تحويل خطيا اثر على هذه المقاييس فان قيم هذه المقاييس بعد تأثير التحويل تصبح.

$$ص \text{ س} = أ. \text{ س} + ب$$

$$ص \text{ و} = أ. \text{ و} + ب$$

$$ص \text{ م} = أ. \text{ م} + ب$$

$$ص \text{ م} \% = أ. \text{ م} \% + ب$$

..... (24-2)

مثال: اذا كان لدينا مجموعة من المشاهدات وسطها الحسابي 70، ووسطها 60 والمنوال 50 والتين الستون 55 فقدمت هذه المقاييس الى تعديلات خطية حسب المعادلة  $ص = 0.4س + 8$  حيث س هي العلامة قبل التعديل وص هي العلامة بعد التعديل . والمطلوب إيجاد قيم المقاييس اعلاه بعد التعديل.

الحل: ص م =  $8 + 70 \times 0.4$

وهذه قيمة الوسط الحسابي بعد التعديل  $36 = 8 + 28$

ص و =  $8 + 60 \times 0.4$

وهذه قيمة الوسيط بعد التعديل  $32 = 8 + 24$

ص م =  $8 + 50 \times 0.4$

وهذه قيمة المتوسط بعد التعديل  $28 = 8 + 20$

ص م =  $8 + 55 \times 0.4$

وهذه قيمة الخين الستون  $30 = 8 + 22$

## (2-7) الوسط الهندسي:

تعريف: الوسط الهندسي لمجموعة من القيم هو الجذر النوني لحاصل ضرب مجموعة من القيم عددها ن .

ولايجاد الوسط الهندسي

أ- للبيانات غير المبوبة.

إذا كان لدينا القيم  $s_1, s_2, \dots, s_n$  فان الوسط الهندسي لهذه المشاهدات والذي سنرمز له بالرمز

..... (25-2)

$$H = \sqrt[n]{s_1 \times s_2 \times \dots \times s_n}$$

ويستخدم اللوغاريتمات لو  $H = \frac{1}{n} \sum \log s$

مثال: اذا كان لدينا القيم 5، 20، 10 فأوجد الوسط الهندسي لهذه المشاهدات.

الحل: هـ-  $\sqrt[3]{10 \times 20 \times 5} = \sqrt[3]{1000} = 10$

أما اذا كان عدد المشاهدات اكبر من ذلك فاننا نستعين بمجادول اللوغاريتمات

ب- إيجاد الوسط هندسي للبيانات المبوبة (التوزيعات التكرارية)

اذا كان لدينا القيم  $s_1$  مكررة  $k_1$  من المرات ،  $s_2$  مكررة  $k_2$  من

المرات، ..... سم  $k_m$  من المرات فان الوسط الهندسي هـ في هذه الحالة

هـ-  $\sqrt[k]{s_1^{k_1} \times s_2^{k_2} \times \dots \times s_m^{k_m}}$  ..... (26 - 2)

لو هـ-  $\frac{1}{\sum \frac{k_i}{s_i}}$  (ك<sub>1</sub> لو  $s_1$  + ك<sub>2</sub> لو  $s_2$  + ..... + ك<sub>n</sub> لو  $s_n$ )

## 2-8) الوسط التوافقي:

تعريف: الوسط التوافقي وهو وسط يحسب معدلات زمنية وهو مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات القيم وسنرمز له بالرمز ق ولايجاده:

أ- إيجاد الوسط التوافقي لقيم المشاهدات غير المبوبة: فاذا كانت  $s_1$ ،  $s_2$ ، ...،  $s_n$

قيم مشاهدات فان الوسط التوافقي

..... (27-2)

$$ق = \frac{n}{\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \dots + \frac{1}{s_n}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{s_i}}$$



مثال : اوجد الوسط التوافقي لقيم المشاهدات التالية:

$$25, 10, 3, 12, 8$$

$$\text{الحل : الوسط التوافقي ق} = \frac{5}{\frac{1}{25} + \frac{1}{10} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{8}}$$

$$7.342 = \frac{5}{0.0681} = \frac{5}{0.04 + 0.100 + 0.333 + 0.083} + 0.125 =$$

مثال : اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية 310، 250، 180

المطلوب إيجاد (1) الوسط الهندسي (2) الوسط التوافقي لهذه البيانات.

الحل : (1) بما ان الارقام كبيرة نستعين بقاعدة اللوغاريتمات

$$\text{هـ} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}(310 \times 250 \times 180)} = \sqrt[3]{310 \times 250 \times 180}$$

$$\text{لو هـ} = \frac{1}{3}(2.4914 + 2.3979 + 2.2553)$$

$$\text{لو هـ} = \frac{7.1446}{3} = 2.3815$$

$$\therefore \text{هـ} = 240.7317$$

(2) لإيجاد الوسط التوافقي

$$\text{ق} = \frac{3}{\frac{3}{0.0012} = \frac{3}{0.003 + 0.004 + 0.005} = \frac{3}{\frac{1}{310} + \frac{1}{250} + \frac{1}{180}}}$$

$$\therefore \text{ق} = 250$$

## ب- إيجاد الوسط التوافقي لقيم المشاهدات المبوبة

إذا كانت  $s_1, s_2, \dots, s_n$  قيم مشاهدات وتكراراتها المقابلة  $k_1, k_2, \dots, k_n$  فإن الوسط التوافقي لقيم هذه المشاهدات هو

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^n k_i s_i}{\sum_{i=1}^n k_i} \quad (28-2)$$

## 2-9) الوسط التريبيعي

تعريف: الوسط التريبيعي هو الجذر التريبيعي للوسط الحسابي لمربعات القيم. وسنرمز له بالرمز  $T$ .

أ- إيجاد الوسط التريبيعي لقيم المشاهدات غير المبوبة:

إذا كان  $s_1, s_2, \dots, s_n$  فإن الوسط التريبيعي لقيم هذه المشاهدات

$$T = \sqrt[n]{\frac{\sum_{i=1}^n s_i^2}{n}} \quad (29 - 2)$$

مثال: أوجد الوسط التريبيعي لقيم المشاهدات التالية

$$3, -5, 5, 0, -3$$

الحل : بتطبيق العلاقة أعلاه:

$$T = \sqrt[3]{\frac{9 + 25 + 25 + 9}{5}} = \sqrt[3]{\frac{68}{5}} = \sqrt[3]{13.6} \therefore T = +3.69$$

ب- إيجاد الوسط الترتيبي للبيانات المبوبة

يمكن إيجاد الوسط الترتيبي للبيانات المبوبة من العلاقة التالية:

(30-2) .....

$$T = \frac{\sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^j R_k \right) \times R_j}{\sum_{j=1}^n R_j}$$

والآن لتتناول مثال يشمل إيجاد الأوساط المختلفة.

مثال: البيانات التالية تمثل الأجر الأسبوعي لمائة عامل مبوبة بالجدول (29-2):

فئات الأجر	-40	-50	-60	-70	-80
عدد العمال	8	22	40	25	5

جدول (29-2)

المطلوب: إيجاد ما يلي:

- 1- الوسط الحسابي لهذه البيانات 2- الوسط الهندسي 3- الوسط التوافقي
- 4- الوسط الترتيبي 5- مقارنة هذه الأوساط مع بعضها البعض.

الحل: نكون الجدول (2 - 30):

فئات الأجر	التكرار	مجموع	مجموع تكرار	$\frac{1}{\text{مجموع تكرار}}$	$\frac{1}{\text{مجموع تكرار}}$	لوجاريتم	لوجاريتم مربع	مجموع تكرار	مجموع تكرار
-40	8	45	360	0.022	0.176	1.6532	13.2256	2025	16200
-50	22	55	1210	0.018	0.396	1.7404	38.2888	3025	66550
-60	40	65	2600	0.015	0.600	1.8129	72.516	4225	169000
-70	25	75	1875	0.013	0.325	1.8751	46.8775	5625	140625
-80	5	85	425	0.012	0.060	1.9294	9.647	7225	36125
المجموع	100		6470		1.557		180.5549		428500

جدول (30-2)

ثم بالاستفادة من الجدول أعلاه نحجب على متطلبات المسألة.

$$64.70 = \frac{6470}{100} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{مركز } i}{\sum_{i=1}^n \text{ك } i} = \text{م} \quad (1)$$

$$1805549 = \frac{1805549}{100} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{ك } i \text{ لو من } i}{\sum_{i=1}^n \text{ك } i} = \text{لو ه} \quad (2)$$

$$63.90708 = \text{ه} \quad \therefore$$

$$64.2261 = \frac{100}{1557} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{ك } i}{\sum_{i=1}^n \text{م } i} = \text{ق} \quad (3)$$

$$65.4599 = \sqrt[3]{4285} = \sqrt[3]{\frac{428500}{100}} = \sqrt[3]{\frac{\sum_{i=1}^n \text{م } i^2 \text{ ك } i}{\sum_{i=1}^n \text{ك } i}} = \text{ت} \quad (4)$$

(5) من النتائج أعلاه نلاحظ أن:

$$\text{ت} < \text{م} < \text{ق} < \text{ه}$$

مقال: أوجد الوسط الهندسي لقيم المشاهدات التالية:

$$\text{ه} = \sqrt[3]{8 \times 4 \times 2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

مثال : اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية.

$$س_1=12 ، س_2=4 ، س_3=28 ، س_4=18 ، س_5=21$$

اوجد الوسط الهندسي لقيم المشاهدات

$$هـ - \sqrt[5]{21 \times 18 \times 28 \times 4 \times 12}$$

$$= \sqrt[5]{(21 \times 18 \times 28 \times 4 \times 12)}$$

$$\text{لو هـ} = \frac{12 \text{ لو} + 4 \text{ لو} + 28 \text{ لو} + 18 \text{ لو} + 21 \text{ لو}}{5}$$

$$= \frac{1322 + 1255 + 1447 + 0602 + 1079}{5}$$

$$\text{لو هـ} = 1.141$$

$$\text{هـ} = 13.835$$

مثال : اوجد الوسط الهندسي لقيم المشاهدات التالية

$$17, 89, 62, 51, 47$$

$$\text{الحل: لو هـ} = \sqrt[5]{17 \times 89 \times 62 \times 51 \times 47} = \sqrt[5]{(17 \times 89 \times 62 \times 51 \times 47)}$$

$$\text{لو هـ} = \sqrt[5]{(17 \times 89 \times 62 \times 51 \times 47)}$$

$$\therefore \text{هـ} = 46.773$$

مثال : اوجد الوسط الهندسي لقيم المشاهدات التالية:

$$38, 14, 60, 51, 78$$

$$\text{الحل: هـ} = \sqrt[5]{38 \times 14 \times 60 \times 51 \times 78}$$

$$= \sqrt[5]{(38 \times 14 \times 60 \times 51 \times 78)}$$

$$\text{لو هـ} = \frac{15797 + 1146 + 1778 + 1707 + 1839}{5}$$

لر- لو 1.620

ر- 41.686

مثال : اوجد الوسط التوافقي لقيم المشاهدات التالية 3، 4، 9

الحل: ق - 
$$\frac{3}{0.693} \quad \frac{3}{0.11 \quad 0.25 \quad 0.333} \quad \frac{3}{\frac{1}{9} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{3}}$$

مثال : اوجد الوسط التريبي لقيم المشاهدات التالية.

الحل: ت - 
$$\frac{2, 0, 2, 3, 4}{5} \quad \frac{4 \quad 16 \quad 9 \quad 4 \quad 0}{5}$$

مثال: البيانات التالية: تمثل فئات الاعمار لخمسين شخصا مينة كما في جدول (2-31):

فئات الأعمار	-2	-4	-6	-8
التكرار	7	10	13	18

جدول (2 - 31)

المطلوب: ايجاد الوسط التريبي

الحل: نكون جدول الحل (2 - 32)

فئات الاعمار	ك <sub>ر</sub>	س <sub>ر</sub>	ك <sub>ر</sub> <sup>2</sup>	ك <sub>ر</sub> <sup>3</sup>
-2	7	3	63	250
-4	10	5	25	637
-6	13	7	49	1458
-8	18	9	81	2650
	50			

جدول (2 - 32)

وبالاستفادة من الجدول أعلاه نجد أن:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2650}{50}} &= \text{ت} \\ \sqrt{53} &= 7.28 \end{aligned}$$

إيجاد العلاقة بين الأوساط التجميعي والحسابي والهندسي والتوافقي:

مثال: إذا كان لدينا أ ، ب عدداً فأثبت أن:

$$\sqrt{\frac{a+b}{2}} < \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}} < \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$\text{حيث أن ت} = \sqrt{\frac{a+b}{2}}, \text{ ق} = \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}}, \text{ هـ} = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

الاثبات: على اعتبار أن:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{a+b}{2}} < \sqrt[3]{\frac{a+b}{2}} \quad \text{بتربيع كلا الطرفين:} \\ &\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \quad \text{وبفك قوس الطرف الأيسر} \\ &\frac{(a+b)^2}{4} < \frac{(a+b)^3}{2} \\ &\frac{(a+b)^2}{4} < \frac{(a+b)^2 \times 2}{2 \times 2} \quad \text{؟} \\ &\frac{(a+b)^2}{4} < \frac{(a+b)^2 \times 2}{4} \quad \text{؟} \\ &\frac{(a+b)^2}{4} < \frac{(a+b)^2 \times 2}{4} \quad \text{؟} \\ &\frac{(a+b)^2}{4} < \frac{(a+b)^2 \times 2}{4} \quad \text{؟} \\ &\frac{(a+b)^2}{4} < \frac{(a+b)^2 \times 2}{4} \quad \text{؟} \end{aligned}$$

$\therefore \left( \frac{b-1}{2} \right)^2 < \text{صفر}$  وهذا لأن مربع أي عدد دائماً موجب ويتم المطلوب.

هل  $\frac{b+1}{2} < \sqrt{b+1}$  أي أن:

بتريع كلا الطرفين:  $\frac{b+1}{2} < \sqrt{b+1}$

$$\left( \frac{b+1}{2} \right)^2 < b$$

$$\frac{b^2 + 2b + 1}{4} < b$$

$$\frac{b^2 + 2b + 1 - 4b}{4} < \text{صفر}$$

$$\frac{b^2 - 2b + 1}{4} < \text{صفر}$$

$\therefore \left( \frac{b-1}{2} \right)^2 < \text{صفر}$  وهذا لأن مربع أي عدد دائماً موجب ويتم المطلوب.

$$\frac{2}{\frac{1}{b} + \frac{1}{1}} < \sqrt{b+1}$$

$$\frac{2}{\frac{1+b}{b}} < \sqrt{b+1}$$

بتريع كلا الطرفين:  $\frac{4b}{1+b} < \sqrt{b+1}$

$$\frac{4b^2}{b^2 + 2b + 1} < b$$

$$\frac{4b^2}{b^2 + 2b + 1} - b < \text{صفر}$$

$$\frac{4b^2 - (b^2 + 2b + 1)b}{b^2 + 2b + 1} < \text{صفر}$$



$$اب(ا^2+2اب+ب^2) \stackrel{?}{<} \frac{اب(4-2اب+ب^2)}{2اب+2اب+2اب} < \text{صفر}$$

$$اب(ا^2-2اب+ب^2) \stackrel{?}{<} \frac{اب(2+2اب+ب^2)}{2اب+2اب+2اب} < \text{صفر}$$

$$اب(ب-ا)^2 < \text{صفر} . \text{ ويتم المطلوب}$$

والآن نتناول المثال التالي كتطبيق عددي على العلاقة أعلاه

مثال: من خلال البيانات التالية 2، 4، 6، 8، 10 اثبت صحة العلاقة التالية

$$\overline{س} < \overline{هـ} < \overline{ق}$$

$$\text{الحل: نجد } \overline{ت} = \sqrt{\frac{2^2 10 + 2^2 8 + 2^2 6 + 2^2 4 + 2^2 2}{5}} = \sqrt{\frac{100 + 64 + 36 + 16 + 4}{5}} = \sqrt{45} = 6.71$$

$$\overline{س} = \frac{30}{5} = \frac{10+8+6+4+2}{5} = 6$$

$$\overline{هـ} = \sqrt[5]{3840} = \sqrt[5]{10 \times 8 \times 6 \times 4 \times 2} = \sqrt[5]{3840}$$

$$\overline{لو هـ} = \frac{1}{5} \text{ لو } 380 = \frac{1}{5} (3.5843) = 0.717$$

$$\overline{هـ} = 5.21$$

$$\overline{ق} = \frac{5}{\frac{1}{10} + \frac{1}{8} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}}$$

$$4.38 = \frac{600}{137} = \frac{120}{13} \times 5 = \frac{137}{120} \div \frac{5}{1} = \frac{5}{\frac{12+15+20+30+60}{120}} = \frac{5}{120}$$

$$\therefore \overline{ت} < \overline{س} < \overline{ق} .$$

أي ان الوسط التريعي < الوسط الحمايي < الوسط الهندسي < الوسط التوافقي

## 2 - 10) أمثلة متنوعة

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالي 7، 15، 8، 9، 8، 13، 10

المطلوب: ايجاد ما يلي:

(1) الوسط الحسابي لقيم المشاهدات (2) الوسط لهذه القيم

(3) المنوال لهذه القيم. (4) الوسط الهندسي

(5) الوسط التوافقي (6) الوسط التريبي (7) الربيع الثالث

(8) بين ان الوسط التريبي < الوسط الحسابي < الوسط الهندسي < الوسط التوافقي

الحل: (1) لايجاد الوسط الحسابي نجده من العلاقة التالية:

$$\bar{x} = \frac{10 + 13 + 8 + 9 + 8 + 15 + 7}{7} = \frac{70}{7} = 10$$

(2) لايجاد الوسيط نرتب قيم المشاهدات ترتيباً تصاعدياً.

15	13	10	9	8	8	7
(7)	(6)	(5)	(4)	(3)	(2)	(1)

نجد ترتيب الوسيط من العلاقة التالية

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{1+n}{2} = \frac{1+7}{2} = 4$$

∴ قيمة الوسيط = 9 وهي القيمة المناظرة للترتيب الرابع

(3) قيمة المنوال هي القيمة الأكثر تكراراً من بين القيم.

∴ قيمة المنوال = 8

(4) نجد الوسط الهندسي من العلاقة.

$$\sqrt[7]{(15 \times 13 \times 10 \times 9 \times 8 \times 8 \times 7)} = \sqrt[7]{15 \times 13 \times 10 \times 9 \times 8 \times 8 \times 7}$$

$$\text{لو هـ} = \frac{1}{7} (1.1761 + 1.1139 + 1.000 + 0.9542 + 0.9031 + 0.9031 + 0.8451)$$

$$0.9851 = -6.8955 \times \frac{1}{7} =$$

$$\text{هـ} = 9.66205$$

$$(5) \text{ الوسط التوافقي في مجده من العلاقة التالية: } \frac{1}{\sum_{r=1}^n \frac{1}{x_r}}$$

$$= \frac{7}{\frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{13} + \frac{1}{10} + \frac{1}{9} + \frac{1}{8} + \frac{1}{7}}$$

$$9.33 = \frac{7}{0.75} = \frac{7}{0.125 + 0.07 + 0.08 + 0.1 + 0.11 + 0.125 + 0.14}$$

$$(6) \text{ الوسط التزيعي نجد الوسط التزيعي من العلاقة التالية}$$

$$\sqrt[7]{\frac{225 + 169 + 100 + 81 + 64 + 64 + 49}{7}} \text{ ت}$$

$$10.36 = \sqrt[7]{\frac{752}{7}} =$$

$$(7) \text{ لايجاد الربع الثالث}$$

$$\text{نجد ترتيب م } 75 \text{ من العلاقة التالية} - \frac{75}{100} = (1 + 7) \frac{3}{4} = (8)$$

$$\therefore \text{ قيمة الربع الثالث القيمة المناظرة للترتيب السادس وهي 13}$$

$$(8) \text{ نلاحظ من الاجابات السابقة ان}$$

$$\text{ت} < \text{هـ} < \text{ق}$$

$$9.33 < 9.662 < 10 < 10.36$$

مثال: في شعبة مؤلفة من 100 طالب وجدان توزيع الطلاب حسب علاماتهم كما هو مبين في الجدول (2 - 33) .

فئات العلامات	عدد الطلاب
-40	8
-50	18
-60	20
-70	26
-80	16
-90	12
	100

جدول (2 - 33)

- (1) كون جدول تكراري نسبي ومتوي
- (2) مثل البيانات بواسطة المنحنى التكراري واذكر نوعه من حيث التماثل
- (3) اوجد عدد الطلاب الذين تزيد علاماتهم عن 85 والذين تقل علاماتهم عن 65.
- (4) ايجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 60، 80.
- (5) ايجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 52، 67.
- (6) ايجاد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 57، 84.
- (7) ايجاد الوسط الحسابي بطرقه الثلاث.
- (8) ايجاد الوسيط لهذه البيانات.
- (9) ايجاد المئين التسعون ، م<sub>75</sub> ، م<sub>25</sub>
- لايجاد نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 60، 80 نرسم المخطط التالي:
- لحصر عدد الطلبة الذين ضمن هذه الفترة لنحده = 20 + 26 - 46
- ∴ نسبة الطلاب = —

5) لايجاد نسبة الطلبة الذين تتراوح علاماتهم بين 52، 67 نرسم المخطط التالي  
نجد اولاً عدد الطلبة من 50 الى 52 ثم نطرح الناتج من عدد طلبة الفترة من 50 الى  
60 على النحو التالي

$$18 \quad 10$$

$$س \quad 2$$

$$س = \frac{18 \times 2}{10} = 3.6 \approx 4$$

∴ عدد الطلبة في الجزء المطلوب اولاً = 18 - 4 = 14

نجد عدد الطلبة في المطلوب من 60 الى 67 على النحو التالي

$$20 \quad 10$$

$$س \quad 7$$

$$س = \frac{20 \times 7}{10} = 14$$

∴ عدد الطلبة ضمن الفترة المطلوبة = 14 + 14 - 28 طالباً

$$نسبة الطلاب = \frac{28}{100} = 0.28$$

$$18 \quad 10$$

$$س = \frac{18 \times 7}{10} = \frac{126}{10} \approx 13$$

$$عدد الطلاب ضمن الفترة المطلوبة = 5 + 26 + 20 + 6 - 57 = 57 \therefore النسبة = \frac{57}{100} = 0.57$$

7) أ) بايجاد الوسط الحسابي بطريقة القانون العام

$$= \frac{7100}{100} = 71$$

ب- إيجاد الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات عن الوسط الفرضي حيث أ الوسط الفرضي

(8) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد (2 - 34)

الفئات	التكرار	أقل من	التكرار المتجمع الصاعد
-40	8	50>	8
-50	18	60>	26
-60	20	70>	46
-70	26	80>	72
-80	16	90>	88
100-90	12	100>	100
	100		

جدول (2 - 34)

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{\text{مجموع التكرارات}}{2} = \frac{100}{2} = 50$$

$$71.54 = 154 + 70 = \frac{40}{26} + 70 = 10 \times \frac{4}{26} + 70 = 10 \times \frac{46 - 50}{46 - 72} + 70$$

$$91.67 = \frac{20}{12} + 90 = 10 \times \frac{88 - 90}{88 - 90} + 90 = 90$$

$$\text{ترتيب م} = 75 = 100 \times \frac{75}{100}$$

الفئة المئينية من 80-90 وحدها الأدنى 80

$$\text{قيمة م} = 75 = 10 \times \frac{72 - 75}{72 - 88} + 80$$

$$\text{قيمة} = 81.875 = 1875 + 80 = \frac{30}{16} + 80$$

## تمارين عامة على الوحدة الثانية

س 1 : البيانات التالية تمثل فئات الاوزان لـ 100 طالب مبينة بالجدول (2 - 35) .

فئات الاوزان	عدد الطلاب
40-	8
45-	18
50-	44
55-	20
60-65	10

جدول (2-35)

المطلوب: ايجاد ما يلي

- (1) الوسط الحسابي باي طريقة (2) الوسيط باي طريقة
- (3) المتوسط باي طريقة (4) الوسط التوافقي .
- (5) الوسط الهندسي (6) الوسط التريبي . (7) الربيع الاول
- (8) تحقق من ان الوسط التريبي < الوسط الحسابي < الوسط الهندسي < الوسط التوافقي .

س 2 : البيانات التالية تمثل الاجور الاسبوعية لمائة عامل مبيوة بالجدول (2 - 36) :

فئات الاجر	44-40	49-45	54-50	59-55	64-60
عدد العمال	10	20	40	20	10

جدول (2 - 36)

- (المطلوب 1) رسم المتحنى التكراري لهذه البيانات
- (2) إيجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات بطرقه المختلفة.
- (3) إيجاد الوسيط لهذه البيانات بطرقه المختلفة.
- (4) إيجاد المنوال لهذه البيانات بطرقه المختلفة.
- (5) إيجاد م<sub>10%</sub> ، م<sub>25%</sub> ، م<sub>75%</sub> ، م<sub>85%</sub> ، م<sub>75%</sub>
- (6) الوسط الهندسي (7) الوسط التوافقي (8) الوسط التريبيعي

س3: في عينة مكونة من (10) مفردات كانت قيم المشاهدات عن المتغير هي :-  
 س<sub>1</sub> = 4 ، س<sub>2</sub> = 8 ، س<sub>3</sub> = 3 ، س<sub>4</sub> = 5 ، س<sub>5</sub> = 2 ، س<sub>6</sub> = 10 ، س<sub>7</sub> = 2 ، س<sub>8</sub> = 4 ،  
 س<sub>9</sub> = 4 ، س<sub>10</sub> = 8.

- (المطلوب 1) إيجاد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات
- (2) تعيين قيمة الوسيط.
- (3) حساب الوسط التوافقي للقيم س<sub>4</sub> + س<sub>6</sub> ، س<sub>10</sub> - 8
- (5) حساب الوسط الهندسي للقيم س<sub>2</sub> ، س<sub>5</sub>
- (6) حساب الوسط الحسابي للقيم س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> ، س<sub>3</sub> ، س<sub>4</sub>
- (7) حساب الوسط التريبيعي للقيم س<sub>6</sub> ، س<sub>8</sub>
- (8) حساب الوسط التوافقي لقيم المشاهدات س<sub>1</sub> ، س<sub>2</sub> ، س<sub>3</sub>
- (9) إيجاد ل<sub>1</sub> ، ل<sub>2</sub> ، ع<sub>3</sub> ، ع<sub>2</sub> ، م<sub>80</sub> لهذه المشاهدات.



## الفصل الثالث

### مقاييس التشتت

#### 3-1 مقدمة :

قبل الخوض في أهم مقاييس التشتت نرى لزاما توضيح فكرة التشتت واعطاء معنى واضح للتشتت.

معنى التشتت بشكل عام: هو تباعد القيم عن بعضها لكن هذا بدوره يحمل بطياته عدة تساؤلات لعدم تجانس البيانات في بعض اوقاته لذا اتفق على ان يكون هناك نقطة ثابتة لقياس التباعد او التقارب عن هذه النقطة ووجد ان الوسط الحسابي خير ممثل لهذه النقطة حيث ان غالبية النقاط تكون قريبة نحو هذه النقطة وقد يكون

- هذا البعد كبيرا أي ان البيانات متباعدة.
- هذا البعد قليلا أي ان البيانات غير متباعدة.
- او قد يكون هذا البعد متساوي أي لا يوجد تشتت

#### 3-2 مقاييس التشتت

لعل أهم مقاييس التشتت نذكر منها ما يلي

##### 3-2-1 المدى ويقسم الى قسمين

1- المدى للبيانات غير المبوبة : وهو أبسط مقاييس التشتت وهو الفرق بين أكبر قيمة

واصغر قيمة. ويمكن إيجادها من العلاقات التالية:

(1 - 3) .....

المدى = اكبر قيمة - اصغر قيمة

ملاحظة: قد تبرز في بعض البيانات بعض القيم المتطرفة كثيراً وبما ان المدى يعتمد على اكبر واصغر قيمة لذا فانه يتأثر مباشرة ويكون البعد كبيراً. لذا ينصح بحذف القيم المتطرفة الصغرى والكبرى. عن طريق استخدام مفاهيم عدة منها:

(1) المدى المتين = المتين الاعلى - المتين الادنى  
(2-3)..... = المتين التاسع والتسعون - المتين الاول =  $99م - 1م$

(2) نصف المدى المتين =  $\frac{\text{المتين التاسع والتسعون} - \text{المتين الاول}}{2} = \frac{99م - 1م}{2}$   
(3-3).....

(3) المدى العشيري = العشير التاسع - العشير الاول =  $9ع - 1ع$   
(4-3)..... =  $90م - 10م$

(4) نصف المدى العشيري =  $\frac{\text{العشير التاسع} - \text{العشير الاول}}{2}$   
(5-3).....

(6-3)..... نصف المدى العشيري =  $\frac{99م - 10م}{2}$

(5) المدى الربيعي = الربيع الاعلى - الربيع الادنى  
(7-3)..... =  $75م - 25م$

$$(6) \text{ نصف المدى الربيعي} = \frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2}$$

$$= \frac{75^{\text{م}} - 25^{\text{م}}}{2}$$

.....(3-8)

مثال: إذا كان لدينا البيانات التالية تمثل درجات عشرة طلاب من 50 كما يلي:

39، 41، 21، 27، 34، 43، 25، 37، 28، 22

والمطلوب إيجاد

الحل: لإيجاد المدى المطلق نتبع ما يلي

1- المدى المطلق

2- نصف المدى الربيعي

نرتب المشاهدات ترتيباً تصاعدياً

21 22 25 27 28 34 37 39 41 43

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10)

(1) المدى المطلق = أعلى مشاهدة - أصغر مشاهدة

$$= 43 - 21 = 22$$

(2) لإيجاد نصف المدى الربيعي.

أ) نجد الربيع الأدنى أو 25<sup>م</sup> كما يلي:

- ترتيب الربيع الأدنى من العلاقة التالية

$$\text{ترتيب الربيع الأدنى} = \frac{25}{100} = (1+10) \frac{25}{100} = \frac{275}{100}$$

- نجد موقع ترتيب الربيع ويقع بين الترتيب الثاني والثالث.

- نجد القيم المناظرة للترتيبين الثاني والثالث وهما 22، 25 تكون قيمة الربيع

$$\text{الأول} = \frac{1}{2} (25 + 22) = 23.5$$

(2) لإيجاد الربيع الأعلى أي 75<sup>م</sup> باتباع الخطوات التالية

- نجد ترتيب الربيع الاعلى من العلاقة.

$$8.25 = \frac{825}{100} = (1+10) \frac{75}{100} = \text{ترتيب الربيع الاعلى}$$

نجد موقع الترتيب من بين التراتيب فيقع بين الترتيب الثامن والتاسع

- نجد القيم المناظرة للترتيبين وهما 39، 41.

- فيكون قيمة الربيع الاعلى هي  $40 = \frac{(41+39)}{2}$

$$8.25 = \frac{165}{2} = \frac{235-40}{2} = \frac{25^M - 75^M}{2} = \text{وعليه فان نصف المدى الربيعي}$$

(2) ايجاد المدى المطلق من البيانات المبوبة نتبع ما يلي:

نجد المدى المطلق من العلاقات التالية .

(9-3)..... المدى المطلق = الحد الاعلى الفعلي لل فئة العليا - الحد الادنى للفئة الدنيا

(10-3)..... وعلاقة أخرى المدى المطلق = مركز الفئة العليا - مركز الفئة الدنيا

ولتحجب القيم المتطرفة حتى نحصل على مقياس تشتت له فاعلية نجد احد المقاييس الواردة في البند السابق وذلك حسب وجود القيم المتطرفة في البيانات. وستركز دراستنا على نوع منها

### (2-3) نصف المدى الربيعي وطرق ايجاده.

(11-3)..... 

$$\frac{\text{الربيع الأعلى} - \text{الربيع الأدنى}}{2} = \text{نصف المدى الربيعي}$$

(12-3)..... 

$$\frac{25^M - 75^M}{2} = \text{نصف المدى الربيعي}$$

مثال : البيانات التالية تمثل الرواتب الشهرية ل 60 موظف يعملون في احد المؤسسات  
مبوبة كما في الجدول (3-1)

فئات الرواتب	-90	-100	-110	-120	-130	-140	-150	المجموع
	99	109	119	129	139	149	159	
عدد الموظفين	5	9	11	17	11	3	2	60

جدول (3 - 1)

المطلوب: أ- إيجاد المدى المطلق

ب- إيجاد نصف المدى الربيعي

الحل: نكون جدول الحل (3 - 2)

فئات الرواتب	عدد الموظفين	الحدود الفعلية	الحد الاعلى الفعلي	التكرار المتجمع الصاعد	مركز الفترة
99-90	5	99.5-89.5	99.5 >	5	94.5
109-100	9	109.5-99.5	109.5 >	14	104.5
119-110	11	119.5-109.5	119.5 >	25	114.5
129-120	17	129.5-119.5	129.5 >	42	124.5
139-130	11	139.5-129.5	139.5 >	53	134.5
149-140	5	149.5-139.5	149.5 >	58	144.5
159-150	2	159.5-149.5	159.5 >	60	154.5
المجموع	60				

جدول (3 - 2)

المدى المطلق = الحد الاعلى للفترة العليا - الحد الادنى للفترة الدنيا

$$70 = 89.5 - 159.5 =$$

المدى المطلق عن طريق مراكز الفئات

$$60 = 94.5 - 154.5 =$$

ب- إيجاد نصف المدى الربيعي من العلاقة التالية

$\frac{\text{الربيع الثالث} - \text{الربيع الأول}}{2}$	$\text{نصف المدى الربيعي} =$
--	------------------------------

(13 - 3) .....

1) نجد الربيع الاول بالخطوات التالية

- نجد ترتيب الربيع الاول وهو

$$\text{ترتيب الربيع الاول} = \frac{60 \times 25}{100} = 15$$

نحدد موقع الربيع الاول في عمود التكرار المتجمع الصاعد ونشير اليه بالسهم.

- نحدد الفئة الربيعية وهي الفئة التي تقع اسفل السهم.

$$\text{وهي } 109.5 - 119.5$$

- نجد الحد الادنى = 109.5.

- نجد الربيع الادنى من العلاقة التالية.

$$\text{الربيع الادنى} = 109.5 + \frac{10}{11} \times \frac{14 - 15}{14 - 25} = 1104$$

2) نجد الربيع الثالث باتباع التالي

- نجد ترتيب الربيع الثالث كما يلي

$$45 = \frac{75}{100} \times 60 -$$

- نحدد موقع الترتيب على عمود المتجمع الصاعد.

- نشير الى الموقع بسهم .

- نحدد الفئة الربعية وهي الفئة الواقعة اسفل السهم

$$- (129.5 - 139.5)$$

= نحدد الحد الادنى = 129.5

نجد الربيع الثالث من العلاقة التالية

$$\text{الربيع الثالث} = 10 \times \frac{42-45}{42-53} + 129.5$$

$$132.23 = 2.73 + 129.5 = \frac{30}{11} + 129.5 =$$

$$10.915 = \frac{110.40 - 132.23}{2} = \text{نصف المدى الربيعي}$$

### 3-3) الانحراف المتوسط :

الانحراف المتوسط : مقياس من مقاييس التشتت يقيس بدقة الانحراف عن الوسط الحسابي وسوف نتناول في كيفية ايجاده.

أ- البيانات غير المجرية

لذا تتبع الخطوات التالية:

- نجد للمتوسط الحسابي لقيم المشاهدات

- نجد الانحرافات المطلقة عن الوسط الحسابي من العلاقة.

$$|x - \bar{x}| = |x - \bar{x}| \text{ حيث } \bar{x} = \text{هو انحراف كل مشاهدة عن وسطها الحسابي}$$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

$$\frac{\sum (x_i - \bar{x})}{n} = \frac{\sum x_i}{n} - \bar{x} = \text{الانحراف المتوسط} \quad (14-3) \dots$$

حيث  $n$  عدد المشاهدات

مثال: اوجد الانحراف المتوسط لقيم المشاهدات التالية

$$10, 14, 16, 13, 7$$

الحل: لحل مثل هذه المسائل تتبع الخطوات التالية

- نجد المتوسط الحسابي لمجموعة القيم

$$\bar{x} = \frac{10+14+16+13+7}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

- نجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات

$$|x_1 - \bar{x}| = |10 - 12| = 2 = |x_1 - \bar{x}|$$

$$|x_2 - \bar{x}| = |14 - 12| = 2 = |x_2 - \bar{x}|$$

$$|x_3 - \bar{x}| = |16 - 12| = 4 = |x_3 - \bar{x}|$$

$$|x_4 - \bar{x}| = |13 - 12| = 1 = |x_4 - \bar{x}|$$

$$|x_5 - \bar{x}| = |7 - 12| = 5 = |x_5 - \bar{x}|$$

$$\text{فيكون الانحراف المتوسط} = \frac{2+2+4+1+5}{5} = \frac{16}{5} = 3.2$$

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية

$$10, 8, 12, 13, 7$$

والمطلوب إيجاد الانحراف المتوسط لهذه المشاهدات



$$\text{الحل: } \bar{x} = \frac{50}{5} = \frac{10+8+12+13+7}{5} = 10$$

$$1- \text{س} - \bar{x} = 3 - 10 = -7, |3 - 10| = 7$$

$$2- \text{س} - \bar{x} = 3 - 10 = -7, |3 - 10| = 7$$

$$3- \text{س} - \bar{x} = 2 - 10 = -8, |2 - 10| = 8$$

$$4- \text{س} - \bar{x} = 2 - 10 = -8, |2 - 10| = 8$$

$$5- \text{س} - \bar{x} = 10 - 10 = 0, |10 - 10| = 0$$

$$\sum |x_i - \bar{x}| = 7 + 7 + 8 + 8 + 0 = 30$$

$$\text{أ.م} = \frac{30}{5} = 6$$

ب- اذا كانت البيانات مبروبة

لذا تتبع الخطوات التالية

- نجد مراكز الفئات ولتكن  $s_1, s_2, \dots, s_n$

- نجد الوسط الحسابي من العلاقة

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n s_i \times K_i}{\sum_{i=1}^n K_i}$$

.....(3-15)

- نجد الانحرافات المطلقة لقيم المشاهدات من العلاقة

$$|x_i - \bar{x}| = |s_i - \bar{x}|$$

- نجد حاصل ضرب  $|x_r| \times K_r$

- نجد الانحراف المتوسط من العلاقة

.....(3-15)

$$\frac{\sum_{r=1}^n |x_r| \times K_r}{\sum_{r=1}^n K_r} = \text{أ.م.} = \text{الانحراف المتوسط}$$

مثال : البيانات التالية تمثل اوزان مئة طالب مصنفة كما في الجدول (3-3)

فئات الاوزان	-40	-45	-50	-55	-60	-65	المجموع
عدد الطلاب	7	18	40	20	10	5	100

جدول (3-3)

والمطلوب إيجاد الانحراف المتوسط لهذه الاوزان

الحل: نكون الجدول (3-4) التالي الذي يشمل جميع البيانات اللازمة للحل.

فئات الاوزان	عدد الطلاب تر	مركز النفقات سر	مركز تر	$ x_r  =  مركز تر - مركز سر $	$ x_r  \times K_r$
-40	7	42.5	297.5	$12.16 =  54.66 - 42.5 $	$85.12 = 7 \times 12.16$
-45	18	47.5	855.0	$7.16 =  54.66 - 47.5 $	$128.88 = 18 \times 7.16$
-50	40	52.5	2200	$2.16 =  54.66 - 52.5 $	$86.4 = 40 \times 2.16$
-55	20	57.5	1151	$2.84 =  54.66 - 57.5 $	$56.8 = 20 \times 2.84$
-60	10	62.5	625	$7.84 =  54.66 - 62.5 $	$78.4 = 10 \times 7.84$
-65	5	67.5	337.5	$12.84 =  54.66 - 67.5 $	$64.2 = 5 \times 12.84$
المجموع	100		5466		499.8

جدول (3 - 4)

$$\text{نجد } \bar{x} \text{ من العلاقة } \frac{\sum_{j=1}^n x_j \times \text{كر}}{\sum_{j=1}^n \text{كر}} = \bar{x}$$

$$54.66 = \frac{5466}{100} =$$

$$\text{نجد الانحراف المتوسط من العلاقة } \frac{\sum_{j=1}^n x_j \times |x_j - \bar{x}| \times \text{كر}}{\sum_{j=1}^n \text{كر}} = \frac{499.8}{100} = 4.998$$

مثال: اوجد الانحراف المتوسط لقيم المشاهدات التالية والمبوبة بالجدول (5-3)

فئات الأجر	-40	-50	-60	-70	80-90	المجموع
التكرار	10	20	50	5	15	100

جدول (5-3)

الحل: نكون جدول الحل (6-3)

فئات الأجر	التكرار	مكرر	مكرر	حاصل	حاصل
-40	10	45	450	19.5	19.5
-50	20	55	1100	9.5	190
-60	50	65	3250	5.	25.
-70	5	75	375	10.5	52.5
90-80	15	85	1275	20.5	307.5
	100		6450		770

جدول (6-3)

نبدأ بإيجاد الوسط الحسابي  $\bar{س}$

$$\bar{س} = \frac{6450}{100} = 64.5$$

$$ح_1 = 45 - 64.5 - 9.5 = |ح| = 19.5$$

$$ح_2 = 55 - 64.5 - 9.5 = |ح| = 19.5$$

$$ح_3 = 65 - 64.5 - 5 = |ح| = 0.5$$

$$ح_4 = 75 - 64.5 - 10.5 = |ح| = 10.5$$

$$ح_5 = 85 - 64.5 - 20.5 = |ح| = 20.5$$

$$م.أ = \frac{\sum_{i=1}^n |ح_i| \times ك_i}{\sum_{i=1}^n ك_i} = \frac{770}{100} = 7.7$$

### 3-4) التباين ومفهومه والانحراف المعياري.

تعريف التباين: هو مجموع مربعات الانحرافات عن وسطها الحسابي مقسوماً على حجم العينة واما الانحراف المعياري فهو الجذر التربيعي للتباين.

ولإيجاد التباين هناك حالتان

أ- اذا كانت البيانات غير المبوبة تتبع الخطوات التالية.

- نجد الوسط الحسابي لقيم المشاهدات من العلاقة.

$$\bar{س} = \frac{س_1 + س_2 + \dots + س_n}{n}$$

- نجد انحرافات القيم عن الوسط الحسابي أي .

$$ح_1 = س_1 - \bar{س}$$

$$ح_2 = س_2 - \bar{س}$$

$$\vdots$$

$$ح_n = س_n - \bar{س}$$

- نجد مربعات الانحرافات عن الوسط الحسابي أي.

$$C_1^2, C_2^2, \dots, C_n^2$$

- نجد التباين عن طريق العلاقة التالية.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{r=1}^n C_r^2}{n} \quad (16-3)$$

إذا كان حجم العينة صغيراً

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{r=1}^n C_r^2}{n-1} \quad (17-3)$$

إذا كان حجم العينة كبيراً

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{r=1}^n C_r^2}{n} \quad (18-3)$$

إذا كان حجم العينة مساوياً لحجم المجتمع الصغير.

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{r=1}^n C_r^2}{n-1} \quad (19-3)$$

إذا كان حجم العينة مساوياً لحجم المجتمع الكبير

والمقصود بحجم العينة أو المجتمع صغيراً إذا كانت  $n \geq 30$  ويكون كبيراً إذا

كانت  $n < 30$ .

مثال : اوجد تباين القيم 3، 7، 11، 14، 5.

الحل : تتبع الخطوات التالية.

$$- \text{ نجد } \bar{x} = \frac{5+14+11+7+3}{5} = \frac{40}{5} = 8$$

- نجد الانحرافات ومربعاتها عن الوسط

$$x_1 = 5 - \bar{x} = 5 - 8 = -3 \quad ، \quad x_1^2 = 9$$

$$x_2 = 7 - \bar{x} = 7 - 8 = -1 \quad ، \quad x_2^2 = 1$$

$$x_3 = 11 - \bar{x} = 11 - 8 = 3 \quad ، \quad x_3^2 = 9$$

$$x_4 = 14 - \bar{x} = 14 - 8 = 6 \quad ، \quad x_4^2 = 36$$

$$x_5 = 5 - \bar{x} = 5 - 8 = -3 \quad ، \quad x_5^2 = 9$$

نجد التباين من العلاقة.

∴ حجم العينة صغير.

$$x^2 = \frac{9+36+9+1+25}{5} = \frac{80}{5} = 16 \text{ وهذه هي قيمة التباين}$$

فيكون  $\sigma = \sqrt{16} = 4$  . وعليه فان الانحراف المعياري = 4

ب) اذا كانت البيانات المعطاة مبوبة:

هناك عدة طرق لايجاد التباين والانحراف المعياري نذكر اهمها:

(1) الطريقة المطولة

- نجد مراكز الفئات للبيانات المبوبة.

- نجد الوسط الحسابي لهذه البيانات من العلاقة

$$\bar{م} = \frac{\sum_{j=1}^n س_j \times ك_j}{\sum_{j=1}^n ك_j}$$

نجد الانحرافات لقيم المشاهدات عن وسطها الحسابي

$$ح_1 = س_1 - \bar{م}$$

$$ح_2 = س_2 - \bar{م}$$

$$\vdots$$

$$ح_n = س_n - \bar{م}$$

- نجد مربعات الانحرافات

$$= ح_1^2 (س_1 - \bar{م})^2, ح_2^2 (س_2 - \bar{م})^2, \dots, ح_n^2 (س_n - \bar{م})^2$$

- نجد حاصل ضرب كل انحراف بالتكرار المقابل له أي نجد

$$ك_1 ح_1^2, ك_2 ح_2^2, \dots, ك_n ح_n^2$$

- نجد التباين من العلاقة

$$\sigma^2 = \frac{ك_1 ح_1^2 + ك_2 ح_2^2 + \dots + ك_n ح_n^2}{\sum_{j=1}^n ك_j} \quad \text{أو}$$

(20-3).....

$$\sigma^2 = \frac{ك_1 (س_1 - \bar{م})^2 + ك_2 (س_2 - \bar{م})^2 + \dots + ك_n (س_n - \bar{م})^2}{\sum_{j=1}^n ك_j} \quad \text{..... (21-3)}$$

ثم نقسم  $\sum_{i=1}^n x_i$  ، اذا كان حجم العينة صغيراً ،  $\sum_{i=1}^n x_i$  ، اذا كان حجم العينة كبيراً

مثال : الجدول التالي يمثل رواتب مئة موظف في إحدى الشركات مبوبة كما في الجدول (7-3).

فئات الرواتب	79-70	89-80	99-90	109-100	119-110	129-120	139-130	المجموع
عدد الموظفين	5	7	21	33	18	13	3	100

جدول (7-3)

والمطلوب إيجاد التباين وكذلك الانحراف المعياري لهذه المشاهدات

الحل: نكون الجدول (8-3) والمحتوي على كافة البيانات اللازمة للحل

فئات الرواتب	التكرار	مركز الفئات	س.ك.ر	ح.س.ر-م	ح <sup>2</sup>	ح <sup>2</sup> .ك.ر
79-70	5	74.5	372.5	ح <sub>1</sub> =74.5	918.19	4590.45
89-80	7	84.5	591.5	ح <sub>2</sub> =20.3	412.09	2890.3
99-90	21	94.5	1984.5	ح <sub>3</sub> =10.3	106.09	2227.89
109-100	33	104.5	3448.5	ح <sub>4</sub> =0.3	00.9	0002.97
119-110	18	114.5	2061.0	ح <sub>5</sub> =9.7	94.09	1693.63
129-120	13	124.5	1618.5	ح <sub>6</sub> =19.7	388.09	5045.17
139-130	3	134.5	403.5	ح <sub>7</sub> =29.7	882.09	2646.27
	100		10480			19096.67

جدول (8-3)



$$104.8 = \frac{10480}{100} = \bar{x}$$

نجد التباين من العلاقة

$$\frac{19096.67}{99} = \frac{19096.67}{1-100} = \frac{\sum_{i=1}^K i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^K i)^2}{K}}{K} = \sigma^2$$

$$192.9 \approx \sigma^2$$

فيكون الانحراف المعياري بهذه الطريقة .

$$\sigma = \sqrt{192.9} = 13.89$$

2- إيجاد الانحراف المعياري عن طريق الانحرافات البسيطة عن الوسط الفرضي.

تتبع الخطوات التالية:

- نجد مراكز الفئات  $x_r$

- نأخذ احد مراكز الفئات الموجودة سابقاً كوسط فرضي وليكن  $A$

- نجد  $h_r - A$

- نجد  $h_r \times K$  ثم نجد  $\sum h_r \times K$

- نجد مربع  $h_r$

- نجد مجموع حاصل ضرب  $h_r^2 \times K$  أي  $\sum h_r^2 \times K$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة.

$$(22-3) \dots\dots\dots \sigma = \sqrt{\left( \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \times K_i}{\sum_{i=1}^n K_i} - \frac{\left( \sum_{i=1}^n \bar{x} \times K_i \right)^2}{\left( \sum_{i=1}^n K_i \right)^2} \right)}$$

هذا اذا كان مجموع التكرارات اقل من او يساوي 30 مفردة يكون الانحراف المعياري اكثر دقة.

3- إيجاد الانحراف المعياري عن طريق الانحرافات البسيطة المختصرة عن الوسط الفرضي. ولذا تتبع الخطوات التالية.

- نجد مراكز الفئات  $\bar{x}$ .

- نجد الوسط الفرضي  $\bar{x}$  أحد مراكز الفئات.

- نجد الانحرافات عن الوسط الفرضي من العلاقة  $\bar{x} - r - s - 1$

$$(23-3) \dots\dots\dots \bar{x} - \frac{\text{الانحرافات البسيطة}}{\text{طول الفئة}} = \frac{\bar{x}}{L} \text{ - نجد الانحرافات المختصرة } \bar{x}$$

- نجد مجموع حاصل ضرب الانحرافات المختصرة  $\times$  التكرارات

- نربع الانحرافات المختصرة ثم نجد مجموع حاصل ضرب مربع الانحرافات المختصرة  $\times$  التكرارات أي

$$\sum \bar{x}^2 \times K_i$$

- نجد الانحراف المعياري من العلاقة التالية:

$$(24-3) \dots\dots\dots \sigma = \sqrt{\left( \frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \times K_i}{\sum_{i=1}^n K_i} - \frac{\left( \sum_{i=1}^n \bar{x} \times K_i \right)^2}{\left( \sum_{i=1}^n K_i \right)^2} \right)}$$

مثال : البيانات التالية تمثل علامات 100 طالب من 50 موزعة بالجدول (3-9).

فئات الدرجات	صفر-	-10	-20	-30	-40	المجموع
عدد الطلاب	2	5	27	47	19	100

جدول (3-9)

المطلوب إيجاد

- (1) الانحراف المعياري بطريقة الانحرافات البسيطة عن الوسط الفرضي.
- (2) الانحراف المعياري عن طريق الانحرافات المختصرة عن الوسط الفرضي.

الحل: نكون جدول يشمل البيانات المطلوبة وهو جدول (3-10)

فئات العلامات	التكرار	مركز الفئات	ح <sup>2</sup>	ح.ك <sup>2</sup>	ح <sup>2</sup>	ح.ك <sup>2</sup>	ح <sup>2</sup>	ح.ك <sup>2</sup>	ح <sup>2</sup>	ح.ك <sup>2</sup>
صفر-	2	5	-20	400	40-	800	2-	4-	4	8
-10	5	15	10-	100	50-	500	1-	5-	1	5
-20	27	25	∴	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
-30	47	35	10	100	470	4700	1	47	1	47
-40	19	45	20	400	380	7600	2	38	4	76
المجموع	100				760	13600		76		136

جدول (3-10)

- 1- نبدأ بحل المطلوب الاول.
- نحدد الوسط الفرضي وليكن  $A = 25$  أحد مراكز الفئات.
- نجد انحراف مراكز الفئات عن الوسط الفرضي.
- نجد مربع الانحرافات عن الوسط الفرضي.

- نجد مجموع حاصل ضرب مربع الانحرافات في التكرارات = 13600

- نجد مجموع حاصل ضرب الانحرافات في التكرارات = 760

نجد الانحراف المعياري من العلاقة:

$$\sqrt{\left(\frac{760}{99}\right)^2 - \frac{13600}{99}} = \sigma$$

$$8.86 = \sqrt{78.47} - \sqrt{58.9 - 137.37} =$$

(2) الحل بطريقة الانحرافات المختصرة.

- تتبع الخطوات السابقة حتى إيجاد الانحرافات.

- نجد الانحرافات المختصرة من العلاقة:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n} \text{ حيث } L : \text{ طول الفئة.}$$

- نجد  $\bar{x}^2$ .

- نجد حاصل ضرب  $\bar{x}$  لكر = 76

- نجد مجموع حاصل ضرب  $\bar{x}^2$  لكر = 136

- نجد الانحراف المعياري.

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{76}{99}\right)^2 - \frac{136}{99}}$$

$$8.83 = \sqrt{0.78} - \sqrt{0.59 - 1.37} \times 10 =$$

$$8.83 = 0.883 \times 10 =$$

نلاحظ ان النتيجةين متشابهتين في القيمة.

### 3-5) أثر التحويلات الخطية على التباين والانحراف المعياري

نظرية: اذا اخضع الانحراف المعياري ع، التباين ع<sup>2</sup> للتحويل الخطي ق(س) = أس+ب فان الانحراف المعياري والتباين يتأثران بهذا التحويل ويصبح كل منهما كما في العلاقتين.

(25-3).....

$$\boxed{\text{ع ص} - | \text{ع ص} |}$$

حيث ع ص قيمة الانحراف المعياري بعد التأثير.

(26-3).....

$$\boxed{\text{ع ص}^2 - \text{ع ص}^2}$$

حيث ع<sup>2</sup>ص: قيمة التباين بعد التأثير

مثال: اذا كان الانحراف المعياري لقيم المشاهدات -4 وتباينها 16 خضعت لتحويل خطي حسب المعادلة.

$$\text{ص} = 0.3 \text{ س} + 7$$

المطلوب: حساب الانحراف المعياري والتباين بعد التعديل

الحل: نجد الانحراف المعياري من العلاقة

$$\text{ع ص} - | \text{ع ص} |$$

$$8.2 - 7 + 1.2 - 7 + 4 \times 0.23 =$$

التباين بعد التعديل حسب العلاقة التالية

$$\text{ع ص}^2 - \text{ع ص}^2$$

$$16 \times 0.49 =$$

$$7.84 =$$

### 3-6) العلامة المعيارية وكيفية إيجادها.

تعريف: ان الدرجة المعيارية لقيمة مشاهدة  $x_r$  لعينة ماهي

$$(27-3) \dots\dots\dots \boxed{ص_r = \frac{x_r - \bar{x}}{ع.س}}$$

حيث  $ص_r$ : هي الدرجة المعيارية للملاحظة  $x_r$ .

اما اذا كانت الملاحظة مأخوذة من مجتمع فان الدرجة المعيارية للملاحظة  $x_r$  يمكن ايجادها من العلاقة.

$$(28-3) \dots\dots\dots \boxed{ي_r = \frac{x_r - \mu}{\sigma}}$$

حيث:  $\mu$ : الوسط الحسابي للمجتمع  $\sigma$ : الانحراف المعياري للمجتمع.

مثال: اذا كانت درجة احمد في امتحان مادة الاحصاء 75 وكان معدل علامات الصف 60 وكان تباين الدرجات 36 أوجد الدرجة المعيارية لدرجة أحمد.

الحل: نجد العلامة المعيارية من العلاقة:

$$\frac{15}{6} = \frac{60 - 75}{6} = \frac{60 - 75}{\sqrt{36}} = ي_r$$

$$ي_r = 2.5 \quad \text{أي ان الدرجة المعيارية} = 2.5.$$

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية 3، 8، 9، 5، 10 أوجد القيم المعيارية لهذه المشاهدات.

$$\text{الحل: - نجد } \bar{x} = \frac{10+5+9+8+3}{5} = 7 \frac{35}{5}$$

$$\text{- نجد } ع.س = \frac{2(7-10)^2 + 2(7-5)^2 + (7-9)^2 + (7-8)^2}{5}$$

$$6.8 = \frac{34}{5} = \frac{9+4+4+1+16}{5}$$

$$2.61 = \sqrt{6.8} = \text{ع.}$$

$$1.5 = \frac{4-}{2.61} = \frac{7-3}{2.61} = \text{ي}_1$$

$$.4 = \frac{1+}{2.61} = \frac{7-8}{2.61} = \text{ي}_2$$

$$0.8 = \frac{2}{2.61} = \frac{7-9}{2.61} = \text{ي}_3$$

$$0.8 = \frac{2-}{2.61} = \frac{7-5}{2.61} = \text{ي}_4$$

$$1.2 = \frac{3}{2.61} = \frac{7-10}{2.61} = \text{ي}_5$$

ولو اخذنا الدرجة المعيارية الاولى وفسرنا الرقم-1.5 وهذا يعني ان قيمة الملاحظة الاولى تنحرف عن وسطها بدرجة ونصف الى اليسار

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية 2،6،12،16،9 أوجد الانحراف المعياري والتباين لهذه المشاهدات.

الحل : نجد الوسط الحسابي لهذه المشاهدات.

$$\bar{x} = \frac{45}{5} = \frac{9+16+12+6+2}{5}$$

$$\text{ع}^2 = \frac{^2(9-9)+^2(9-16)+^2(9-12)+^2(9-6)+^2(9-2)}{5}$$

$$\text{للتباين} \quad 23.2 = \frac{116}{5} = \frac{0+49+9+9+49}{5}$$

$$\text{ع} = \sqrt{23.2} = 4.82 \quad \text{الانحراف المعياري}$$

مثال: اوجد الانحراف المتوسط لقيم المشاهدات التالية 5، 10، 15، 13، 7

الحل: نجد الوسيط

$$10 = \frac{50}{5} = \frac{5+10+15+13+7}{5} = \bar{x}$$

$$\frac{|10-5|+|10-10|+|10-15|+|10-13|+|10-7|}{5} = \text{الانحراف المتوسط أ.م.}$$

$$3.2 = \frac{16}{5} = \frac{5+0+5+3+3}{5} =$$

هناك طرق اخرى لايجاد التباين لقيم المشاهدات غير المبوبة

(29-3).....

$$\sigma^2 = \frac{\sum x^2}{n} - \left( \frac{\sum x}{n} \right)^2$$

مثال: اوجد التباين لقيم المشاهدات التالية

8 ، 12 ، 10 ، 5 ، 15

الحل: نكون جدول الحل (3 - 11)

س د	س
64	8
144	12
100	10
25	5
225	15
558	50

جدول (3 - 11)





ع - 21.83 الانحراف المعياري

$$\frac{440}{100} - \frac{49600}{100} = \sigma^2$$

$$491.6 = 4.4 - 496 =$$

التباين التجميعي: (Poaled Variance)

لو أخذنا من مجتمعات عددها (ن) عينات ذوات الحجوم (ن<sub>1</sub>، ن<sub>2</sub>، .....، ن<sub>ن</sub>) ومن هذه العينات حسبنا (س<sub>1</sub>، س<sub>2</sub>، .....، س<sub>ن</sub>) و (ع<sub>1</sub><sup>2</sup>، ع<sub>2</sub><sup>2</sup>، .....، ع<sub>ن</sub><sup>2</sup>) فان متوسط متوسطات العينات المرجحة بحجم العينة:

$$\frac{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot n_i}{\sum_{i=1}^n n_i} = \mu \quad (30-3)$$

$$\frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2 + \dots + n_n \bar{x}_n}{n_1 + n_2 + \dots + n_n} = \mu \quad (31-3)$$

حيث : ن<sub>ر</sub> س<sub>ر</sub> : مجموع القيم.

ن<sub>ر</sub>: عدد القيم

ومنه فإن:-

$$\frac{\sum_{i=1}^n (n_i - 1) \sigma_i^2 + n \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \mu)^2}{\sum_{i=1}^n (n_i - 1)} = \sigma^2 \quad (32-3)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (n_i - 1) \sigma_i^2 + n \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - \mu)^2}{\sum_{i=1}^n (n_i - 1)} = \sigma^2 \quad (33-3)$$

مثال : اذا كانت لدينا العينات التالية كما في جدول (3-13):-

III	II	I	
200	300	100	ن
60	55	65	س
64	81	49	ع <sup>2</sup>

جدول (3-13)

فإن:-

$$\frac{\sum_{i=1}^n n_i \bar{x}_i}{\sum_{i=1}^n n_i} = \mu$$

$$58.3 = \frac{35000}{600} = \frac{200 \times 60 + 300 \times 55 + 100 \times 65}{600} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (n_i - \bar{n})^2 (\mu - \bar{x}_i)^2 + \sum_{i=1}^n n_i (x_i - \bar{x}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (n_i - \bar{n})} = \sigma^2$$

$$\frac{6422.2 + 3333.3 + 4444.4 + (199)(64) + (81)(299) + (99)49}{3 - 600} =$$

$$93.81 = \frac{56006}{597}$$

(34-3).....

عدد درجات الحرية = عدد القيم المستقلة = ن-1

س يحدد قيمة واحدة من القيم ، والقيم الباقية تكون مستقلة.

مثال: اذا كانت علامات امتحان مقرر من (20) علامة لها  $\bar{x} = 10$ ،  $s = 2.5$ .  
فاذا أصبحت علامة الامتحان (15) علامة فإن

$$\bar{x} = \frac{15}{20} \times 10 = 7.5$$

$$\bar{s} = \frac{15}{20} \times 2.5 = 1.875$$

### • المقارنة بين تشتت توزيعين أو أكثر:

ويستخدم لهذه العملية عدة مقاييس منها:

#### 1 - مقياس التشتت النسبي:

وهو موضوع يعالج مسألة المقارنة بين تشتت توزيعين أو أكثر، فعند دراسة توزيعين أو أكثر فاننا نواجه مشاكل منها:

1- الاختلاف في وحدات القياس.

2- الاختلاف في المتوسطات.

ولهذا عرف مقياس التشتت النسبي ، بأنه :

$$\text{مقياس التشتت النسبي} = \frac{\text{مقياس التشتت المطلق}}{\text{مقياس المتوسط}}$$

.....(3-35)

ومن هذه المقاييس:-

#### 1- نصف المدى الربيعي

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{1}{2}(r_3 - r_1)$$

ويؤايم هذا المقياس الوسيط  $\left[ \frac{1}{2}(r_1 + r_3) \right]$  لمقياس توسط.

$$\text{وعليه فان : مقياس التشتت النسبي} = \frac{\text{مقياس التشتت المطلق}}{\text{مقياس المتوسط}}$$

.....(3-36)

$$\frac{(1-r-3r)}{2} = \frac{(1+r-3r)}{2}$$

$$\frac{1-r-3r}{1+r-3r} =$$

(37-3).....

مقياس التشتت النسبي =  $\frac{1-r-3r}{1+r-3r}$

وإذا اخذ شكل النسبة المئوية فإنه يعرف بمعامل الاختلاف:-

(38-3).....

معامل الاختلاف =  $100\% \times \frac{1-r-3r}{1+r-3r}$

## 2- الانحراف المعياري:

ويؤايمه الوسط الحسابي لمقياس توسط.

وعليه :

(39-3).....

مقياس التشتت النسبي =  $\frac{\sigma}{\bar{x}}$

وإذا اخذ شكل النسبة المئوية فإنه يعرف بمعامل الاختلاف

(40-3).....

معامل الاختلاف =  $\%100 \times \frac{\sigma}{\bar{x}}$

## أهمية تطبيق معامل الاختلاف:

الاختلاف نفي لمفهوم التجانس، ويوظف هذا المفهوم للدلالة على النوعية

والجودة، وخاصة ضبط النوعية ومراقبة الجودة.

\* مثال: إذا كان لدينا المعلومات في جدول (3-14) عن سلعتين فأيهما أجود؟

البيان	السلعة I	السلعة II
وزن الوحدة	60 غم	60 غم
سعر الوحدة	340	340
ن	50	50
$\bar{m}$	52	48
ع	8	7
معامل الاختلاف	$15.385\% = 100\% \times \frac{8}{52}$	$14.583\% = 100\% \times \frac{7}{48}$

جدول (3 - 14)

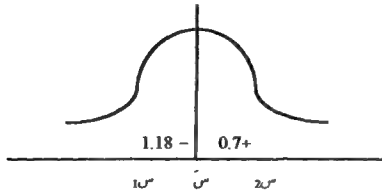
فمن الجدول يتبين ان السلعة II اجود من السلعة I . لأن معامل اختلافها أقل معامل اختلاف السلعة الأولى.

\* ملحوظة : كلما قل معامل الاختلاف زادت جودة السلعة.

## (2) - التعبير : (Standardization)

هو وضع القيم ضمن معيار موحد، واحصائياً هو عبارة عن التعبير عن قيم المتغير (س) الذي له التوزيع التكراري د(س) والمتوسط ( $\bar{m}$ ) والانحراف المعياري (ع)، بعدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها تلك القيم عن وسطها الحسابي. فلأي قيمة مثل (سر) فان:

$$y_r = \frac{\bar{m} - m_r}{\sigma} \quad \dots\dots\dots (3-41)$$



ففي الرسم السابق:-

- القيمة  $(0.7+)$  تعني ان القيمة  $S_2$  تنحرف  $(0.7)$  انحرافاً معيارياً عن  $\bar{S}$  من الجهة اليمنى .

- القيمة  $(1.18-)$  تعني أن القيمة  $S_1$  تنحرف  $(1.18)$  انحرافاً معيارياً عن  $\bar{S}$  من الجهة اليسرى.

\* مثال: ضمن المعطيات في جدول (3-15) أيهما مستواه أعلى:-

البيان	أحمد	محمود
س <sub>د</sub>	72	82
$\bar{S}$	60	80
ع	80	10
ي <sub>م</sub>	1.5	0.2

جدول (3-15)

أحمد مستواه أعلى لأن القيمة المعيارية له أكبر.

\* ملحوظة: كلما زادت القيمة المعيارية زاد المستوى، ومنه فإن المستوى يتناسب تناسباً طردياً مع القيمة المعيارية.

### \* مميزات القيمة المعيارية :

- 1- للمتغير (س) الذي له التوزيع التكراري د(س)، فإن القيمة المعيارية (ي) لها توزيع تكراري كمتوسط حسابي = 1، وتباين = 1

$$\bar{y} = 1$$

\* البرهان :-

$$\text{من العلاقة } \bar{y} = \sum \frac{1}{n} = \sum \frac{1}{n} = \frac{\sum \frac{1}{n}}{1} = \frac{\sum \frac{1}{n}}{1}$$

$$\bar{y} = \sum \frac{1}{n} = \sum \frac{1}{n} = \frac{\sum \frac{1}{n}}{1} = \frac{\sum \frac{1}{n}}{1}$$

$$(\bar{y}) \sum \frac{1}{n \times \epsilon} =$$

لكن  $\sum \frac{1}{n \times \epsilon} = 0$  لأن مجموع الانحرافات عن الوسط الحسابي = 0

$$(\bar{y}) \sum \frac{1}{n \times \epsilon} = 0 \quad \Leftarrow$$

$$\frac{1}{n \times \epsilon} \times \text{صفر} = \text{صفر وهو المطلوب.}$$

$$\bar{y} = 1$$



البرهان:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})}{n} = 0$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \text{لكن } \bar{x} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2$$

$$\left( \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \geq \frac{1}{n} \times \sum_{i=1}^n x_i^2 =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} \geq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} \quad \text{لكن } \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n} = 0$$

$$1 = 0 \times \frac{1}{n}$$

\* مثال: جد (ق) و (غ) للبيانات التالية المبينة بالجدول (3-16).

س	(س-س)	ي	ي <sup>2</sup>
2	16	1.14-	2
4	4	1.41-	0.5
6	0	0	0
8	4	0.7+	0.5
10	16	1.14+	2
30	40	صفر	5

جدول (3 - 16)

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{30}{6} = 5$$

$$8 = \frac{40}{5} = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \sigma^2$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \text{صفر}$$

$$1 = \frac{5}{5} = \frac{\sum y^2}{n} = \sigma_y^2$$

إذا كان المتغير (س) الذي له التوزيع التكراري [د(س)] والمتوسط (س) والنباين (ع<sup>2</sup>) فإن القيمة المعيارية (ي) لها التوزيع [د(س)] = التوزيع المعتاد م (μ ، σ) الذي يعتمد على :

$$\mu = - \quad y = 1$$

$$\text{والتوزيع المعتاد (م) - د(س) = } \frac{1}{\sqrt{\sigma^2}} \cdot \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - x}{\sigma} \right)^2$$

مثال: إذا كان الوسط الحسابي لقيم مشاهدات 50 وانحرافها المعياري 4 وكانت مجموعة أخرى من قيم مشاهدات مبوبة كما في الجدول التالي.

فيما يلي بيان بعدد ساعات الاستعداد الاسبوعي المبوبة حسب مشاهدات العينة العشوائية الحجم 50 من الطلبة.

فئات الاستعداد	عدد الطلبة	سمر	سمر كثر	فئات اقل من	التكرار التجميعي
-0	8	1	8	2 >	8
-2	12	3	36	4 >	20
-4	15	5	75	6 >	35
-6	10	7	70	8 >	45
10-8	5	8	45	10 >	50
	50		234		

- المطلوب :1- إيجاد الوسط الحسابي لهذه البيانات
- 2- إيجاد المتوسط بطريقة الفروق
- 3- إيجاد الوسيط.
- 4- إيجاد الانحراف المتوسط.
- 5- إيجاد الانحراف المعياري.
- 6- إيجاد المتين 80.
- 7- إيجاد معامل الاختلاف.
- 8- إيجاد معامل الالتواء بطريقة بيرسون.
- 9- إيجاد معامل الالتواء بناءً على مقارنة المساحة بين الربيعان.

الحل:

$$1- \text{الوسط الحسابي: } \frac{\sum x}{n} = \frac{234}{50} = 4.68$$

2- إيجاد المتوسط بطريقة الفروق

$$\text{المتوال} = \text{الحد الأدنى للفترة المتوالية} - \frac{f_1}{f_1 + f_2} \times L$$

حيث  $f_1$  = تكرار الفئة المتوالية - التكرار السابق

$f_2$  = تكرار الفئة المتوالية - التكرار اللاحق

$L$  - طول الفئة

$$= 2 \times \frac{3}{5+3} + 4 =$$

$$= 4.75 = 0.75 + 4 = \frac{6}{8} + 4 =$$

(2) الوسيط = الحد الأدنى للفترة الوسيطة +  $\frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار التجميعي السابق}}{\text{التكرار التجميعي اللاحق} - \text{التكرار التجميعي السابق}}$

$$25 = \frac{50}{2} = \frac{\sum_{k=1}^n f_k}{2}$$

الفترة الوسيطة = 4

الوسيط = الحد الأدنى للفترة الوسيطة +  $\frac{\text{ترتيب الوسيط} - \text{التكرار التجميعي السابق}}{\text{التكرار التجميعي اللاحق} - \text{التكرار التجميعي السابق}}$

$$\frac{20 - 25}{20 - 35} + 4 =$$

$$\frac{10}{15} + 4 = 2 \times \frac{5}{15} + 4 =$$

$$4.66 =$$

(4) إيجاد الانحراف المتوسط

$$\frac{\sum_{k=1}^n |x_k - \bar{x}| f_k}{n} = \text{الانحراف المتوسط}$$

$$\frac{|5-9|5 + |5-7|10 + |5-5|15 + |15+|15+|5-3|12 + |5-1|8}{50} =$$

$$1.92 = \frac{96}{50} = \frac{20 + 20 + 0 + 24 + 32}{50}$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2 f_k}{n}} = \text{(5) الانحراف المعياري}$$

$$\sqrt{\frac{2(5-9)^2 5 + 2(5-7)^2 10 + (5-5)^2 15 + (5-3)^2 12 + (5-1)^2 8}{50}} = \sigma$$

$$\sqrt{\frac{80 + 40 + 0 + 48 + 128}{50}} = \text{ع}$$

$$2.433 = 5.92 \sqrt{\frac{296}{50}} =$$

(6) إيجاد المتئين 80

$$40 = 50 \times \frac{80}{100} = \sum_{\text{ك}} \times \frac{80}{100}$$

الفئة المتئينة - 6

قيمة المتئين 80 - الحد الأدنى للفئة المتئينة +  $\frac{\text{ترتيب المتئين} - \text{الترتيب التجميعي السابق للمتئين}}{\text{الترتيب التجميعي اللاحق} - \text{الترتيب التجميعي السابق}}$  ل

$$2 \times \frac{35 - 40}{35 - 45} + 6 =$$

$$\frac{10}{10} + 6 = 2 \times \frac{5}{10} + 6 =$$

$$7 = 1 + 6 =$$

(7) إيجاد معامل الاختلاف

$$100\% \times \frac{\text{ع}}{\text{مت}} =$$

$$0.5198 = \frac{2.433}{4.68} =$$

$$100\% \times 0.52 =$$

(8) حساب معامل الالتواء بطريقة بيرسون

$$\frac{\text{م} - \text{م}}{\text{ع}} \div \frac{3(\text{م} - \text{و})}{\text{ع}} =$$

$$0.102 = \frac{4.75 - 5}{2.433} \times 5$$

$$\text{معامل الالتواء} = \frac{(1-2r_1) - (2-3r_2)}{1-3r_1}$$

$$= \frac{(1-0) - (2-3r_2)}{1-3r_1}$$

ر3: الربيع الثالث

ر2: و الوسيط

ر1: الربيع الاول

ر3 - المتين 75

$$38 = 50 \times \frac{75}{100} = \sum K_r \times \frac{75}{100} = \text{ترتيب المتين}$$

الفئة المتينة=6

قيمة المتين 80= الحد الأدنى للفئة المتينة +  $\frac{\text{ترتيب المتين} - \text{التكرار التجميعي السابق للمتین}}{\text{التكرار التجميعي اللاحق السابق}}$

$$2 \times \frac{35-38}{35-45} + 6 =$$

$$2 \times \frac{3}{10} + 6 =$$

$$\frac{6}{10} + 6 =$$

$$6.6 = 0.6 + 6 =$$

ر2- المتين 25

$$12.52 = 50 \times \frac{25}{100} = \sum K_r \times \frac{25}{100} = \text{ترتيب المتين}$$

الفئة المتينة = 2

$$2 \times \frac{8-12.5}{8-20} + 2 = \text{قيمة المتين}$$

$$2 \times \frac{4.5}{12} + 2 =$$

$$\frac{9}{12} + 2 =$$

$$2.75 = 0.75 + 2 =$$

$$\frac{(J_1 - J_2) - (J_2 - J_3)}{J_1 - J_3} = \text{معامل الالتواء}$$

$$\frac{(2.75 - 4.66) - (4.66 - 6.6)}{2.75 - 6.6} =$$

$$\frac{1.91 - 1.94}{3.85} =$$

$$\frac{0.03}{3.85} =$$

$$0.00779 = 10 \times 7.792 =$$

# 1

## مراجعة جمع قيم المتغيرات

### 1-1 مقدمة

من المعروف أن جميع عمليات التحليل الإحصائي تعتمد بشكل رئيس، على عمليات حسابية تتكرر في كل مسألة إحصائية، وأهم هذه العمليات الحسابية هي: عملية جمع قيم المتغيرات، سواء كانت متغيرات عادية أو متغيرات مؤشرة، وعملية جمع مربعات هذه القيم، ثم عملية جمع ضروب قيم المتغيرات المختلفة، وفي هذا الفصل نبين كيف نقوم بتنفيذ هذه العمليات الحسابية باستخدام الكمبيوتر.

### 2-1 جمع N من المتغيرات SUMMATTION OF DATA POINTS

النص الرياضي للمسألة:

اكتب برنامجاً لإيجاد المجموع S لسلسلة من قيم المتغيرات  $X_1, X_2, \dots$  إلى  $X_N$  عددها N، ومعرفة على النحو التالي:

$$S = \sum_{i=1}^N X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$



**الحل** يمكن ترتيب حل المسألة على ثلاث خطوات: الخطوة الأولى ويتمثل بكتابة خوارزمية الحل (وتعني الخطوات المنطقية المرتبة لحل المسألة)، والخطوة الثانية، ويتمثل بكتابة برنامج الكمبيوتر للمسألة، أما الخطوة الثالثة فتتمثل بتطبيق البرنامج على مثال محلول مع عرض نتائج:

### خوارزمية الحل:

تتكون خوارزمية حل المسألة من الخطوات الآتية:

1. تعيين قيمة عدد المتغيرات  $N$
2. تلكد أن  $N$  يساوي أو أكبر من 1
3. صُنِّرْ مخزن المجموع  $S$ ، أي ضع قيمة  $S$  تساوي صفراً في ذاكرة الكمبيوتر
4. أدخل قيم  $X$  الى ذاكرة الكمبيوتر الواحدة تلو الأخرى.
5. اجمع كل قيمة من قيم  $X$  الى المجموع  $S$  في مخزن  $S$  في الذاكرة حسب جملة الجمع

$$S = S + X$$

حيث تمثل  $S$  في الجانب الأيمن قيمة المجموع قبل اضافة  $X$  بينما تمثل  $S$  في الجانب الأيسر اخر قيمة للمجموع بعد اضافة  $X$  اليه

6. اطبع النتيجة  $S$
7. توقف وأنه البرنامج

### البرنامج المستعمل:

تمثل السطور التالية البرنامج المطلوب لحل المسألة، وينبغي ملاحظة أن جميع السطور التي تبدأ بكلمة الملاحظة REM ليست جزءاً من البرنامج، وإنما هي سطور

أضيفت لشرح خطوات البرنامج لاغراض تعليمية. وعند تنفيذ البرنامج يمكن المستخدم أن يحفظها جميعها منه دون أن يؤثر ذلك في عمل البرنامج.

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE SUM OF DATA POINTS **
020 REM **1. ENTER THE NUMBER OF POINTS N **
030     INPUT N
040 REM ** 2. CHECK : IF N IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM**
050     IF N < 1 THEN END
060 REM ** 3. PUT THE SUM S EQUAL TO ZERO **
070 S = 0.0
080 REM ** USE K TO COUNT DATA POINTS AND PUT IT INITIALLY EQUAL TO ZERO **
090     K = 0
100 REM ** 4. ENTER THE VALUE OF NEXT X **
110     INPUT X
120 REM ** 5. ADD THE NEW X TO THE LAST SUM S **
130     S = S + X
140 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW X **
150 REM ** HAS BEEN ADDED TO THE SUM **
160     K = K + 1
170 REM ** CHECK IF ALL X'S HAVE NOT BEEN ADDED THEN GO BACK TO **
180 REM ** GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE **
190     IF K > N THEN GO TO 110
200 REM ** 6. PRINT THE SUM S **
210     PRINT THE SUM OF THE DATA POINTS='S
220 REM ** 7. END THE PROGRAM **
230     END
    
```

مثال إذا كان لديك المعطيات الآتية:

$$X_1 = 3.2 \quad , \quad X_2 = 1.7 \quad , \quad X_3 = 7.2 \quad , \quad X_4 = 4, X_5 = 14$$

فاحسب مجموعها S حيث:

$$S = \sum_{i=1}^5 X_i$$

**الحل:** أدخل المعطيات مرتبة بعد البرنامج على النحو التالي:

5  
3.2  
1.7  
7.2  
4.0  
14.0

حيث تمثل 5 قيمة عدد النقاط N

وسيتظهر لك الجواب فوراً على الصورة التالية:

THE SUM OF THE DATA POINTS = 30.1

**مثال** استخدم البرنامج لجمع أوزان عينات من الفوسفات جمعها أحد العاملين في منجم للفوسفات في أحد الايام وكانت كالاتي:

4.21 , 6.35 , 5.42 , 8.11 , 6.04 , 7.55 , 3.46 , 9.05

**الحل:** أدخل المعطيات مرتبة بعد البرنامج على النحو التالي:

8  
4.21  
6.35  
5.42  
8.11  
6.0  
7.55  
3.46  
9.05

حيث تكون قيمة N وهي 8 في البداية حسب ورودها في البرنامج  
وسيتظهر لك الجواب على الصورة التالية:

THEN SUM OF THE DATA POINTS = 50.19

### 3.1 جمع N من المتغيرات المؤشرة SUMMATION OF N SUBSCRIPTED VARIABLES

#### النص الرياضي للمسألة:

يعتبر النص الرياضي للمسألة الواردة في الفقرة السابقة نصاً لهذه المسألة أيضاً، والاختلاف بينهما هو في طريقة الحل بالكمبيوتر، وبهذا يكون النص هو إيجاد الجمع S معرفاً على الصورة السابقة نفسها وعلى النحو التالي:

$$S = \sum_{i=1}^N X_i = X_1 + X_2 + \dots + X_N$$

خوارزمية الحل: تتكون خوارزمية الحل من الخطوات الآتية:

1. عين عدد المتغيرات N
2. تلكد أن N يساوي أو أكبر من 1
3. أدخل قيم X إلى ذاكرة الكمبيوتر على شكل مصفوفة وسمها A
4. صفر مخزن المجموع S، أي ضع قيمة S تساوي صفراً.
5. اجمع كل قيمة من قيمة X إلى المجموع S حسب جملة الجمع  

$$S = S + A(I)$$
6. اطبع النتيجة S
7. توقف

#### البرنامج المستعمل

```
10 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES SUMMATION OF SUBSCRIPTED VARIABLES **
20 REM ** TELL COMPUTER THAT YOU WILL STORE THE X VALUES **
30 REM ** IN THE MATRIX A WHICH CAN TAKE 1000 VALUES OF THEM **
```

```

40 REM ** THE NUMBER 1000 CAN BE REPLACED BY ANY NUMBER **
50   DIM A (1000)
60 REM ** 1. ENTER THE NUMBER OF POINTS N **
70   INPUT N
80 REM ** 2. IF N IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM **
90   IF N < 1 THEN END
100 REM ** IF N IS MORE THAN 1000 THEN END THE PROGRAM **
110   IF N > 1000 THEN END
120 REM ** USE I AS A COUNTER FOR DATA POINTS & SET IT TO 1 INITIALLY **
130   I = 1
140 REM ** 3. ENTER THE VALUE OF NEXT X & PUT IT IN MATRIX A **
150   INPUT X
160   A (I) = X
170 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER I **
180   I = I + 1
190 REM ** TEST IF ALL THE X'S HAVE NOT BEEN ADDED THEN GO BACK **
200 REM ** TO ADD ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE **
210   IF I <= N GO TO 150
220 REM ** 4. PUT THE SUM S EQUAL TO ZERO **
230   S = 0.0
240 REM ** RESET THE COUNTER I TO 1 **
250   I = 1
260 REM ** 5. ADD NEW X TO THE LAST SUM **
270   S = S + A (I)
280 REM ** MOVE THE COUNTER I BY 1 TO TAKE NEXT X **
290   I = I + 1
300 REM ** TEST IF ALL POINTS HAVE BEEN ADDED **
310 REM ** OTHERWISE; GO BACK TO GET NEXT X **
320   IF I <= N GO TO 270
330 REM ** 6. PRINT THE RESULTS S **
340   PRINT ' THE SUM OF DATA POINTS =:S
350 REM ** 7. END THE PROGRAM **
360   END

```

**مثال:** أثناء معرض لبيع الكتب ، كانت مبيعات احد المشتركين في المعرض خلال اسبوع كما يلي:

120 , 200 , 220 , 150 , 300 , 180 , 100

**الحل:** أدخل الأرقام المعطاة مرتبة بعد البرنامج على النحو:

7  
120  
20  
220  
150  
300  
180  
100

وسيتظهر لك الجواب على الصورة التالية

THE SUM OF DATA POINTS = 1270

**مثال:** قام دكتور في كلية للتربية بدراسة احصائية على مستوى الذكاء لدى خمس مجموعات من طلبة الرياضيات في احدى الجامعات، وكانت اعداد المجموعات التي جرى عليها البحث كما يلي: 45, 56, 62, 32, 28 فجد العدد الكلي لهذه المجموعات.

**الحل:** أدخل الأرقام المعطاة مرتبة بعد البرنامج على النحو التالي

5  
45  
56  
62  
32  
28

وسيتظهر لك الجواب المطلوب على الصورة

THE SUM OF DATA POINTS = 223

4-1 مجموع N من ضربات المتغيرات  
SUMMATION OF PRODUCTS OF N DATA

النسب الرياضية للمعادلة:

اكتب برنامجاً لحساب مجموع N من ضربات المتغيرين X و Y حسب التعريف

التالي:

$$S = \sum_{i=1}^N X_i Y_i = X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + \dots + X_N Y_N$$

خوارزمية الحل:

1. من عدد المتغيرات N
2. تككد أن N يساوي أو اكبر من 1
3. ضع قيمة مجموع الضروب S تساوي صفراً
4. أدخل قيم كل من X و Y إلى ذاكرة الكمبيوتر الواحدة تلو الأخرى
5. اجمع قيمة ضرب X في Y كل مرة إلى المجموع S حسب جملة الجمع  $S = S + X * Y$
6. اطبع النتيجة S
7. توقف

البرنامج المستعمل هو:

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE SUM OF PRODUCTS OF DATA POINTS **
020 REM ** 1. ENTER THE NUMBER OF POINTS(N) **
030 INPUT N
040 REM ** 2. CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM **
050 IF N<1 THEN END
```

```

060 REM ** 3. PUT THE SUM S EQUAL TO ZERO **
070     S = 0.0
080 REM ** USE K TO COUNT DATA POINTS & PUT IT ZERO INITIALLY **
090     K = 0
100 REM ** 4. ENTER NEXT X & Y **
110     INPUT X, Y
120 REM ** 5. ADD THE PRODUCT X*Y TO THE SUM S **
130     S = S + X*Y
140 REM ** MOVE THE COUNTER K BY 1: I.E. ADD 1 TO K **
150     K = K + 1
160 REM ** IF ALL X'S & Y'S HAVE NOT BEEN PROCESSED THEN GO BACK **
170 REM ** TO GET NEXT ONES: OTHERWISE CONTINUE **
180     IF K <> N GO TO 110
190 REM ** 6- PRINT THE SUM OF PRODUCTS S **
200     PRINT "THE SUM OF PRODUTS =:S
210 REM ** 7. END THE PROGRAM**
220     END
    
```

مثال إذا أعطيت القيم المرتبة الآتية:

$$X_1 = 5, \quad X_2 = 3, \quad X_3 = 6, \quad X_4 = 8$$

$$Y_1 = 2, \quad Y_2 = 4, \quad Y_3 = 3, \quad Y_4 = 7$$

فاحسب مجموع ضرب هذه القيم.

الحل: أدخل قيم  $X$  و  $Y$  المتقابلة مرتبة بعد قيمة  $N$  على النحو التالي:

4  
5,2  
3,4  
6,3  
8,7

وسيتظهر لك الجواب على الصورة التالية:

THE SUM OF PRODUCTS = 96



**مثال** اشترى تاجر ثلاثة أنواع من القماش كان سعر الأول ديناراً للمتر الواحد، والثاني ديناراً ونصف الدينار، والثالث دينارين، فإذا اشترى من النوع الأول 200 متراً ومن الثاني 150 متراً، ومن الثالث 100 متراً، فاحسب المبلغ الذي يدفعه التاجر.

**الحل:** أدخل قيم الامتار والاسعار المتقابلة مرتبة بعد قيمة N على النحو التالي:

3  
200, 1.0  
150, 1.5  
100, 2.0

وسيتظهر لك الجواب على الصورة التالية:

THE SUM OF PUODUCTS = 625

5-1 جمع مربعات N من المتغيرات  
SUMMATION OF SQUARES OF N DATA POINTS

النس الرياضي المعادلة:

يمكن التعبير عن النس بالمعادلة التالية:

$$S = \sum_{i=1}^N X_i^2 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_N^2$$

خوارزمية الحل:

1. عين عدد المتغيرات N
2. تأكد أن N يساوي أو أكبر من 1
3. خذ قيمة مجموع المربعات S تساوي صفراً
4. أدخل قيم X الواحدة تلو الأخرى
5. اجمع مربع كل X مدخلة إلى مجموع المربعات S حسب معادلة الجمع

$$S = S + X * X$$

6. اطبع النتيجة النهائية S

7. توقف.

### البرنامج المستعمل هو:

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES SUM OF SQUARES OF N DATA POINTS **
020 REM ** 1. ENTER THE NUMBER OF POINTS N **
030     INPUT N
040 REM ** 2. IF N IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM **
050     IF N<1 THEN END
060 REM ** 3. PUT THE SUM OF SQUARES EQUAL TO ZERO **
070     S = 0.0
080 REM ** USE K TO COUNT DATA POINTS & PUT IT ZERO INITIALLY **
090     K=0
100 REM ** 4. ENTER THE VALUE OF NEXT X **
110     INPUT X
120 REM ** 5. ADD SQUARE OF X TO THE LAST SUM S **
130     S = S + X*X
140 REM ** MOVE THE COUNTER K TO THE NEXT POINT & ADD 1 TO IT **
150     K = K+1
160 REM ** TEST IF ALL X'S WERE TAKEN: IF NOT GO BACK TO GET ANOTHER.
170     IF K>N GO TO 110
180 REM ** 6. PRINT SUM OF SQUARES S **
190     PRINT "THE SUM OF SQUARES OF DATA POINTS =:S
200 REM ** 7. END THE PROGRAM **
210     END
    
```

مثال      جد مجموع مربعات القيم الآتية:

$$X_1=4, \quad X_2=2, \quad X_3=5, \quad X_4=7, \quad X_5=1$$

**الحل:** أدخل القيم المعطاة مرتبة بعد قيمة عددها  $N$  وهو 5 هنا على النحو التالي:

5  
4  
2  
5  
7  
1

وسيتظهر لك الجواب على الصورة التالية:

THE SUM OF SQUARES OF DATA POINTS = 95

**مثال** ارادت مؤسسة لبيع الأراضي تقسيم قطعة ارض لديها إلى أربعة أقسام بحيث يكون شكل كل منها مربعاً، وكانت أطوال القطع هي: 60, 100, 140, 80 بالامتار احسب المساحة الكلية للأرض.

**الحل:** أدخل قيم الأطوال مرتبة على النحو التالي بعد البرنامج:

4  
60  
100  
80  
140

وسيتظهر لك الجواب على الصورة التالية مساحة بالامتار المربعة:

THE SUM OF SQUARES OF DATA POINTS = 39600

**نماذج**

1. أعطيت القيم التالية من إحدى الدراسات الإحصائية:

$$X_1=10, X_2=7, X_3=5, X_4=12, X_5=4, X_6=10$$

فاحسب كلامن:

$$\sum_{i=1}^6 X_i^2 \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{i=1}^6 X_i \quad (\text{ا})$$

$$\sum_{i=1}^6 X_i^4 \quad (\text{د})$$

$$\sum_{i=1}^6 X_i^3 \quad (\text{ج})$$

2. وجد مصنع للرخام أن عدد قطع البلاط المكسورة اثناء التصنيع خلال اربع وعشرين ساعة كان كما يلي:

3 5 2 2 4 5 7 8 6 4 11  
6 8 3 17 6 4 5 8 12 10

احسب العدد الكلي للبلاط المكسور في ذلك اليوم.

3. أعطيت قيم المتغيرات الآتية:

$$X_1 = 5, \quad X_2 = 9, \quad X_3 = 10, \quad X_4 = 6$$

$$Y_1 = 3, \quad Y_2 = 6, \quad Y_3 = 2, \quad Y_4 = 4$$

$$Z_1 = 2, \quad Z_2 = 1, \quad Z_3 = 3, \quad Z_4 = 5$$

فاحسب كلامن:

$$\sum_{i=1}^4 X_i Y_i \quad (\text{ب})$$

$$\sum_{i=1}^4 X_i \quad (\text{ا})$$

$$\sum_{i=1}^4 X_i^2 \quad (\text{ج})$$

$$\sum_{i=1}^4 X_i Y_i Z_i \quad (\text{د}) \quad \text{اكتب برنامجا لحساب}$$

$$\sum_{i=1}^4 X_i^2 Y_i \quad (\text{هـ}) \quad \text{اكتب برنامجا لحساب}$$

# 2

## تحليل البيانات

### 2-1 حساب الوسط الحسابي لسلسلة من N من الأعداد

#### النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب الوسط الحسابي Arithmetic Mean لسلسلة من الأعداد  $X_1, X_2, \dots, X_N$  إلى  $X_N$  عددها N باستخدام الصيغة الرياضية التالية.

$$m = \frac{\sum_{i=1}^N X_i}{N} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_N}{N}$$

#### خوارزمية الحل

- 1- عَيِّن العدد (N) لنقاط البيانات (X) في السلسلة.
- 2- تلكد من أن (N) يساوي 1 أو أكبر.
- 3- صَفِّرْ مخزن المجموع S، أي ضع قيمة S تساوي صفراً في ذاكرة الكمبيوتر.
- 4- أدخل قيم X إلى ذاكرة الكمبيوتر الواحدة تلو الأخرى.
- 5- اجمع كل قيمة من قيم (X) إلى المجموع S في مخزن (S) في الذاكرة حسب صيغة الجمع  $S = S + X$ .

- 6- انقسم مجموع القيم (X) على عدد نقاط البيانات (N) وذلك لحساب الوسط الحسابي (A).
- 7- اطبع النتيجة
- 8- توقف وأنت البرنامج

### البرنامج المستعمل:

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE ARITHMETIC MEAN **
020 REM ** OF A SERIES OF DATA POINTS **
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER OF POINTS N **
040     INPUT N
050 REM ** 2. CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM **
060     IF N<1 THEN END
070 REM ** 3. PUT THE SUM S EQUAL TO ZERO **
080     S= 0.0
090 REM ** USE K TO COUNT DATA POINTS & PUT IT TO ZERO **
100     K= 0
110 REM ** 4. ENTER THE VALUE OF NEXT X **
120     INPUT X
130 REM ** 5. ADD THE NEW X TO THE LAST SUM S **
140     S= S + X
150 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW **
160 REM ** X HAS BEEN ADDED TO THE SUM **
170     K= K+1
180 REM ** CHECK IF ALL X'S HAVE NOT BEEN ADDED **
190 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE **
200     IF K > N THEN GO TO 120
210 REM ** 6. COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A) BY DIVIDING **
220 REM ** THE SUM OF DATA POINTS (S) BY THE NUMBER N **
230     A = S/N
    
```

```
250 PRINT "THE ARITHMETIC MEAN = 6.2"
260 REM ** 8. END THE PROGRAM **
210 END
```

مثال جد الوسط الحسابي لنقاط البيانات الآتية 3، 4، 7، 8، 9.

الحل: أدخل البيانات مرتبة على النحو التالي:

5  
3  
4  
7  
8  
9

حيث تمثل 5 عدد نقاط البيانات، وسيظهر لك الجواب فوراً على النحو التالي:

THE ARITHMETIC MEAN = 6.2

مثال باعت إحدى شركات الاطارات من خلال ستة فروع لها الكميات الآتية من الاطارات خلال يوم واحد: 520، 460، 372، 288، 412، 348. استخدم البرنامج المذكور آنفاً لحساب معدل المبيعات اليومية للشركة.

الحل: أدخل البيانات مرتبة بعد قيمة عددها N وهو هنا 6 مرتبة على النحو التالي:

6  
520  
460  
372  
288  
412  
348

وسيعطيك الجواب على الصورة التالية:

THE ARITHMETIC MEAN = 400

## 2-2 حساب الوسيط لسلسلة من N من نقاط البيانات

### النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب الوسيط Median لسلسلة من نقاط البيانات  $X_1, X_2, \dots$  إلى  $X_N$  عددها N - سواء كانت مرتبة ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً - باستخدام الصيغتين الرياضيتين التاليتين:

$$M_d = X_{\left(\frac{N+1}{2}\right)} \quad \text{إذا كان N عدداً فردياً}$$

$$M_d = \frac{X_{\frac{N}{2}} + X_{\left(\frac{N}{2}+1\right)}}{2} \quad \text{إذا كان N عدداً زوجياً}$$

### خوارزمية الحل:

- 1- افرض سلسلة من نقاط البيانات (X) مرتبة ترتيباً رقمياً تصاعدياً أو تنازلياً.
- 2- عين العدد (N) لنقاط البيانات (X) في السلسلة.
- 3- إذا كان العدد N فردياً، فإن الوسيط (M) هو نقطة البيانات التي تحمل التسلسل  $(N+1)/2$
- 4- إذا كان العدد N زوجياً، فإن العدد الاوسط (M) هو مجموع نقاط البيانات التي تحمل التسلسلات  $\left[\frac{N}{2}\right]$  و  $\left[\left(\frac{N}{2}\right)+1\right]$  مقسوماً على 2.

### البرنامج المستعمل:

```
010 REM ** THIS PROGRAM DETERMINES THE MEDIAN OF DATA POINTS **
020 REM ** TELL COMPUTER THAT (X) WILL BE A VECTOR OF **
030 REM ** DATA POINTS WITH A MAXIMUM OF 400 ELEMENTS. **
040 REM ** NOTE THAT THE CHOICE 400 AS A LIMIT IS ARBITRARY **
```



```

050 DIM X(400)
060 REM ** 1. THE PROGRAM ASSUMES THAT THE DATA POINTS ARE **
070 REM ** IN EITHER ASCENDING OR DESCENDING NUMERICAL ORDER **
080 REM ** 2. DETERMINE THE NUMBER (N) OF DATA POINTS BY **
090 REM ** COUNTING THE DATA POINTS AS THEY ARE READ. IT WILL **
100 REM ** BE ASSUMED THAT A DATA POINT WITH A VALUE OF **
110 REM ** -98765 WILL SIGNIFY THE END OF THE SERIES. **
120 REM ** NOTE, HOWEVER, THAT THE DATA POINT WITH THIS VALUE **
130 REM ** IS NOT CONSIDERED PART OF THE SERIES **
140 REM
150 REM ** INITIALIZE THE COUNTER AND SUBSCRIPT (N) BY SETTING **
160 REM ** IT EQUAL TO 1 TO INDICATE THE NUMBER OF THE **
170 REM ** DATA POINT (X) THAT WILL BE ENTERED AND AS A **
180 REM ** SUBSCRIPT TO REFERENCE ANY DATA POINT IN THE VECTOR **
190 N = 1
200 REM ** GET THE NEXT DATA POINT AND STORE IT TEMPORARILY **
210 REM ** IN THE STORE XO. **
220 INPUT XO.
230 REM ** CHECK THE VALUE OF (XO) TO DETERMINE IF IT IS **
240 REM ** EQUAL TO THE SPECIAL VALUE -98765. IF IT IS EQUAL,
250 REM ** GO TO 460; OTHERWISE, CONTINUE. **
260 IF XO = -98765.0 THEN GO TO 460.
270 REM ** NOW (N) INDICATES THE NUMBER OF THE DATA POINT **
280 REM ** JUST READ AND STORED IN (XO). IT IS CONVENIENT **
290 REM ** TO STORE THE NTH DATA POINT IN THE NTH **
300 REM ** ELEMENT OF THE VECTOR (X). X(N) INDICATES **
310 REM ** THE NTH ELEMENT OF THE VECTOR X. **
320 X(N) = XO
330 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER & SUBSCRIPT (N) TO INDICATE **
340 REM ** THE NUMBER OF THE NEXT DATA POINT TO BE **
350 REM ** PROCESSED. **

```

```

360     N = N + 1
370 REM ** CHECK (N) TO DETERMINE IF THE NUMBER OF **
380 REM ** NEXT DATA POINT IS GREATER THAN 400; IF IT IS, **
390 REM ** THEN END THE PROGRAM **
400     IF N > 300 THEN END.
410 REM ** GO BACK TO THE NEXT DATA POINT. **
420     GOTO 10
430 REM ** SINCE THE VALUE -98765 WAS COUNTED ABOVE, **
440 REM ** AND SINCE IT IS NOT AS A PART OF THE DATA **
450 REM ** SERIES, THE (N) MUST BE REDUCED BY 1. **
460     N = N - 1
470 REM ** IF THE (N) IS EQUAL TO ZERO, THE MEDIAN CAN- **
480 REM ** NOT BE COMPUTED, SO THE PROGRAM STOPS **
490     IF N = 0 THEN END
500 REM ** 3. DETERMINE IF (N) IS ODD OR EVEN. **
510 REM ** IF THE INTEGER PART OF K/2 EQUALS THE ACTUAL **
520 REM ** VALUE K/2 THEN K IS EVEN. IF SO GOTO 670. **
530 REM ** AND COMPUTE THE MEDIAN (M). IF K IS ODD, **
540 REM ** THEN CONTINUE. **
550     IF INT (K/2) = (K/2) THEN GOTO 670.
560 REM ** CALCULATE THE SUBSCRIPT (I) TO INDICATE THE **
570 REM ** PARTICULAR ELEMENT OF (X) THAT IS THE MEDIAN. **
580 REM ** SINCE (N) IS ODD NOW, THEN (I) WILL BE. (N+1)/2. **
590     I = (N+1)/2
600 REM ** DETERMINE (M) BY SETTING M=X(I). **
610     M = X(I)
620 REM ** GOTO 750 TO PRINT THE MEDIAN **
630     GOTO 750
640 REM ** 4. NOW (N) IS EVEN, SO COMPUTE (I1) TO INDICATE **
650 REM ** THE FIRST OF THE ELEMENTS OF (X) TO BE USED **
660 REM ** TO DETERMINE (M). **
670     I1 = N/2
680 REM ** COMPUTE (I2) AS ABOVE, BUT ADD 1 TO THE RESULT. **
690     I2 = (N/2) + 1

```

```

700 REM ** DETERMINE THE SUM (S) OF X(I1) & X(I2). **
710     S = X(I1) + X(I2)
720 REM ** COMPUTE THE MEDIAN (M) BY DIVIDING (S) BY 2. **
730     M = S/2.0
740 REM ** PRINT THE MEDIAN (M) OF THE SERIES. **
750     PRINT "THE MEDIAN IS:"M
760 REM ** END THE PROGRAM **
770     END
    
```

مثال      استخدم البرنامج أعلاه لحساب الوسيط لسلاسل الأعداد التالية:

(أ) 42, 20, 14, 8, 4, 3

(ب) 10, 8, 6, 4, 2

الحل:      (أ) أدخل البيانات مرتبة كما يأتي:

```

3
4
8
14
20
42
-98765
    
```

وسوف يظهر لك الجواب على الصورة التالية:

THE MEDIAN IS 11

(ب) أدخل البيانات مرتبة كما يأتي:

```

2
4
6
8
10
-98765
    
```

وسوف يظهر لك الجواب على الصور التالية:

THE MEDIAN IS 6

مثال حصل احد التلاميذ على العلامات الآتية في الامتحان النهائي:  
98, 91, 87, 81, 75, 68, 62  
الحل: أدخل البيانات المذكورة مرتبة كما يلي:

62  
68  
75  
81  
87  
91  
98  
-98765

وسوف يظهر الجواب على الصور، التالية:

THE MEDIAN IS 81

### 3-2 حساب الانحراف المتوسط لبيانات غير مترابطة

النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب الانحراف المتوسط (M. D.) Mean Deviation لسلسلة  
من نقاط البيانات  $X_1, X_2, \dots, X_N$  عددها  $N$  لها متوسط  $m$  باستخدام الصيغة  
الرياضية التالية:

$$M. D. = \frac{\sum_{i=1}^N |X_i - m|}{N}$$

خوارزمية الحل:

1- عين العدد ( $N$ ) لنقاط البيانات ( $X$ ) في السلسلة.

- 3- احسب المتوسط الحسابي (A) لسلسلة نقاط البيانات، وذلك بحساب مجموع نقاط البيانات (S) ثم قسمة هذا المجموع على عدد النقاط (N).
- 4- احسب مجموع الانحرافات المطلقة absolute deviations عن المتوسط (S2) لكافة نقاط البيانات وكما يأتي:
- أ- عيّن الانحراف عن المتوسط (D2) لكل نقطة بيانات (X) وذلك بطرح المتوسط الحسابي (A) للسلسلة من كل نقطة بيانات (X).
- ب- عيّن القيمة المطلقة (D3) للانحراف من المتوسط (D2) في الخطوة (أ).
- ج- احسب مجموع الانحرافات المطلقة عن المتوسط (S2) وذلك بإضافة القيم المطلقة (D3) التي حصلنا عليها من الخطوة (ب).
- 5- احسب الانحراف المتوسط (D1) وذلك بقسمة مجموع الانحرافات المطلقة عن المتوسط (S2) على عدد نقاط البيانات (N) في السلسلة.
- 6- اطبع النتيجة.
- 7- توقف وإنه البرنامج.

#### البرنامج المستعمل:

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE MEAN DEVIATION **
020 REM ** TELL THE COMPUTER THAT (X) WILL BE A SERIES OF **
030 REM ** DATA POINTS WITH A MAXIMUM OF 400 ELEMENTS.**
040 REM ** NOTE THAT THE CHOICE OF 400 AS A LIMIT IS ARBITRARY **
050     DIM X(400)
060 REM ** 1. ENTER THE NUMBER OF POINTS (N)**
070     INPUT X
080 REM ** 2. CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END PROGRAM **
090     IF N< 1 THEN END.
100 REM ** IF (N) IS MORE THAN 400 THEN END PROGRAM **
110     IF N> 400 THEN END
    
```

```

120 REM ** COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A) **
130 REM ** SET THE ACCUMULATOR OF THE SUM (S) TO ZERO**
140     S = 0.0
150 REM ** USE K TO COUNT DATA POINTS AND PUT IT INITIALLY **
160 REM ** EQUAL TO 1 **
170     K = 1
180 REM ** ENTER THE VALUE OF NEXT X**
190     INPUT X(K)
200 REM ** 3(A) COMPUTE THE SUM OF DATA POINTS (S) BY ADDING, THE LAST X**
210     S = S + X(K)
220 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW X**
230 REM ** HAS BEEN ADDED TO THE SUM**
240     K = K + 1
250 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED **
260 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
270     IF K <= N THEN GOTO 190
280 REM ** 3 (B) COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
290     A = S/N
300 REM ** 4. COMPUTE THE SUM OF THE ABSOLUTE DEVIATIONS**
310 REM ** FROM THE MEAN (S2) FOR ALL DATA POINTS. **
320 REM ** SET THE ACCUMULATOR S2 TO ZERO**
330     S2 = 0.0
340 REM ** RESET K TO 1**
350     K = 1
360 REM ** 4(A): COMPUTE THE DEVIATION FORM THE MEAN(D2)**
370     D2 = X(K)-A
380 REM ** 4(B): COMPUTE THE ABSOLUTE VALUE (D3) OF THE**
390 REM ** DEVIATION FROM THE MEAN (D2)**
400     D3 = ABS(D2)
410 REM ** 4(C): COMPUTE THE SUM ABSLOUTE DEVIATIONS FROM**
420 REM ** THE MEAN (S2) BY ADDING THE VALUE OF THE CURRENT**

```

```

430 REM ** ABSOLUTE DEVIATION FROM THE MEAN (D3) TO THE**
440 REM ** LAST (S2).**
450     S2 = S2 + D3
460 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW**
470 REM ** X HAS BEEN ADDED**
480     K = K + 1
490 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED**
500 REM ** THEN GO BACK TO ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
510     IF K <= N THEN GOTO 370
520 REM ** 5. COMPUTE THE MEAN DEVIATION (D1)**
530     D1 = S2/N
540 REM ** 6. PRINT THE MEAN DEVIATION (D1) **
550     PRINT 'THE MEAN DEVIATION IS:D1
560 REM ** END THE PROGRAM **
570     END

```

**مثال** قام ستة طلاب بالتسجيل على الساعات المعتمدة الآتية في أحد الفصول الدراسية: 9, 12, 6, 15, 3, 18. احسب الانحراف المتوسط لهذه الساعات.

**الحل:** أدخل البيانات المذكورة اعلاه مرتبة على النحو التالي:

6  
9  
12  
6  
15  
3  
18

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE MEAN DEVIATION IS 4.5

**مثال** قام قسم السيطرة النوعية في احد مصانع انتاج المربيات بأخذ عشرة عينات عشوائية لأوزان طب المربيات التي تزن عادة 250 غراماً ووجد أن لوزاتها كما يأتي: 260، 255، 262، 245، 240، 242، 238، 254، 265  
**الحل:** أدخل البيانات المذكورة اعلاه مرتبة على النحو التالي:

10  
 260  
 255  
 262  
 245  
 240  
 242  
 238  
 254  
 265  
 249

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE MEAN DEVIATION IS 8.2

#### 4-2 حساب التباين لمجموعة من الأعداد

النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب التباين Variance لسلسلة من نقاط البيانات  $X_1, X_2, \dots, X_N$  عددها  $N$  ومتوسطها  $m$  باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - m)^2}{N}$$



### خوارزمية الحل:

- 1- عين العدد (N) لنقاط البيانات (X) في السلسلة.
- 2- تأكد من أن (N) يساوي 1 أو أكبر.
- 3- احسب المتوسط الحسابي (A) لسلسلة البيانات، وذلك بحساب مجموع نقاط البيانات (S) ثم قسمة هذا المجموع على عدد النقاط (N).
- 4- احسب مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط (S2) لكافة نقاط البيانات (N) كما يأتي:
- (أ) عين الانحراف عن المتوسط (D) لكل نقطة بيانات (X) وذلك بطرح المتوسط الحسابي (A) لهذه السلسلة من كل نقطة بيانات (X).
- (ب) عين مربع الانحراف عن المتوسط (D2) لكل نقطة بيانات وذلك بتربيع قيمة الانحراف الذي حصلت عليه من الخطوة (أ) ولكل نقطة بيانات.
- (ج) احسب مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط (S2).
- 5- احسب التباين (V) للسلسلة وذلك بقسمة مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط (S2) على عدد نقاط البيانات (N).
- 6- قرب النتيجة إلى ثلاث مراتب عشرية.
- 7- اطبع النتيجة.
- 8- توقف وأنه البرنامج.

### البرنامج المستعمل:

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE VARIANCE **
020 REM ** TELL THE COMPUTER THAT (X) WILL BE A SERIES **
030 REM ** OF DATA POINTS WITH A MAXIMUM OF 400 ELEMENTS**
040 REM ** NOTE THAT THE CHOICE OF 400 AS A LIMIT IS ARBITRARY**
050     DIM X(400)
    
```

```

060 REM ** 1. ENTER THE NUMBER OF POINTS (N)**
070   INPUT X
080 REM ** 2. CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM**
090   IF N<1 THEN END
100 REM ** IF (N) IS MORE THAN 400 THEN END THE PROGRAM**
110   IF N> 400 THEN END
120 REM ** COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
130 REM ** SET THE ACCUMULATOR OF THE SUM (S) TO ZERO**
140   S = 0.0
150 REM ** USE K TO COUNT DATA POINTS AND PUT IT INITIALLY**
160 REM ** EQUAL TO 1 **
170   K = 1
180 REM ** ENTER THE VALUE OF NEXT X**
190   INPUT X(K)
200 REM ** 3(A): COMPUTE THE SUM OF DATA POINTS (S) BY**
210 REM ** ADDING THE LAST X**
220   S = S + X(K)
230 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A**
240 REM ** NEW X HAS BEEN ADDED TO THE SUM**
250   K = K + 1
260 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN **
270 REM ** ADDED THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE **
280 REM ** CONTINUE**
290   IF K<= N THEN GOTO 190
300 REM ** 3(B): COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
310   A = S/N
320 REM ** 4.COMPUTE THE SUM OF THE SQUARED DEVIATIONS**
330 REM ** FROM THE MEAN (S2) FOR ALL DATA POINTS**
340 REM ** SET THE ACCUMULATOR (S2) TO ZERO**
350   S2 = 0.0
360 REM ** RESET K TO 1 **

```

```

370      K = 1
380 REM ** 4(A): COMPUTE THE DEVIATION FROM THE MEAN (D)**
390      D = X(K) - A
400 REM ** 4(B): COMPUTE THE SQUARED DEVIATION FROM (D2)**
410      D2 = D * D
420 REM ** 4(C): COMPUTE THE SUM OF SQUARED DEVIATIONS **
430 REM ** FROM THE MEAN (S2)**
440      S2 = S2 + D2
450 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW **
460 REM ** X HAS BEEN ADDED **
470      K = K + 1
480 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN **
490 REM ** ADDED THEN GO BACK TO ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE **
500      IF K <= N THEN GOTO 390
510 REM ** 5. COMPUTE THE VARIANCE (V) **
520      V = S2 / N
530 REM ** 6. ROUND THE RESULTING VARIANCE TO THE **
540 REM ** NEAREST THIRD DECIMAL PLACES **
550      V = INT (V * 1000 + 0.5) / 1000
560 REM ** 7. PRINT THE VARIANCE (V) **
570      PRINT "THE VARIANCE IS: V"
580 REM ** 8. END THE PROGRAM **
590      END

```

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

20  
67  
85  
92  
64  
53  
32  
65  
64  
73  
52  
88  
79  
67  
64  
52  
82  
93  
70  
60  
50

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE VARIANCE IS 235.64

مثال : قامت إحدى دوريات مرور الطرق الخارجية بإجراء مسح لمعرفة سرعة السيارات على الطرق السريعة حيث حصلت على النتائج التالية: 95، 80، 113، 122، 79، 80، 92، 130، 105، 65، 78، 65. احسب مقدار التباين لهذه السرعة.

الحل: ادخل البيانات على الصورة التالية:

12  
95  
80  
113  
122  
79  
80  
92  
130  
105  
65  
78  
65

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE VARIANCE IS 422.833

## 5-2 حساب الانحراف المعياري لمجموعة من الأعداد

النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب الانحراف المعياري standard deviation لسلسلة من نقاط البيانات  $X_1, X_2, \dots, X_N$  عددها  $N$  ومتوسطها  $m$  باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (X_i - m)^2}{N}}$$

### خوارزمية الحل:

- 1- عين العدد (N) لنقاط البيانات (X) في السلسلة.
  - 2- نتكد من أن (N) يساوي 1 لو اكبر.
  - 3- احسب المتوسط الحسابي (A) لسلسلة البيانات وذلك بحساب مجموع نقاط البيانات (S) ثم قسمة هذا المجموع على عدد النقاط (N).
  - 4- احسب مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط (S2) لكافة نقاط البيانات (N) كما يأتي:
- (أ) عين الانحراف عن المتوسط (D) لكل نقطة بيانات وذلك بطرح المتوسط الحسابي (A) للسلسلة من كل نقطة بيانات (X).
- (ب) عين مربع الانحرافات عن المتوسط (D2) لكل نقطة بيانات وذلك بتربيع قيمة الانحراف عن المتوسط (D) الذي حصلت عليه من الخطوة (أ).
- (ج) احسب مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط (S2).
- 5- احسب الانحراف المعياري (D3) للسلسلة وذلك بأخذ الجذر التربيعي للمقدار الناتج من قسمة مجموع مربعات الانحرافات على عدد نقاط البيانات.
  - 6- قرب النتيجة إلى ثلاث مراتب عشرية.
  - 7- اطبع النتيجة.
  - 8- توقف وأنه البرنامج.

### البرنامج المستعمل:

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE STANDARD DEVIATION **
020 REM ** TELL THE COMPUTER THAT (X) WILL BE A SERIES OF **
030 REM ** DATA POINTS WITH A MAXIMUM OF 400 ELEMENTS.**
040 REM ** NOTE THAT THE CHOICE OF 400 AS A LIMIT IS ARBITRARY **
```

```

060 REM ** 1. ENTER THE NUMBER OF POINTS (N)**
070   INPUT X
080 REM ** 2. CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END PROGRAM **
090   IF N<1 THEN END.
100 REM ** IF (N) IS MORE THAN 400 THEN END THE PROGRAM **
110   IF N> 400 THEN END
120 REM ** 3. COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A) **
130 REM ** SET THE ACCUMULATOR OF THE SUM (S) TO ZERO**
140   S = 0.0
150 REM ** USE K TO COUNT DATA POINTS AND PUT IT INITIALLY **
160 REM ** EQUAL TO 1 **
170   K = 1
180 REM ** ENTER THE VALUE OF THE NEXT X**
190   INPUT X(K)
200 REM ** 3(A): COMPUTE THE SUM OF DATA POINTS (S) BY ADDING, **
210 REM ** THE CURRENT VALUE X(K) TO THE PREV. VALUE (S)**
220   S = S + X(K)
230 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW X**
240 REM ** HAS BEEN ADDED TO THE SUM**
250   K = K + 1
260 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED THEN **
270 REM ** GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
280   IF K <= N THEN GOTO 190
290 REM ** 3 (B) COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
300   A = S/N
310 REM ** 4. COMPUTE THE SUM OF THE SQUARED DEVIATIONS**
320 REM ** FROM THE MEAN (S2) FOR ALL DATA POINTS. **
330 REM ** SET THE ACCUMULATOR (S2) TO ZERO**
340   S2 = 0.0
350 REM ** RESET THE COUNTR K TO 1**
360   K = 1

```

```

370 REM ** 4(A): COMPUTE THE DEVIATION FORM THE MEAN(D)**
380     D=X(K)-A
390 REM ** 4(B): COMPUTE THE SQUARED DEVIATION FROM (D2)**
400     D2=D * D
410 REM ** 4(C): COMPUTE THE SUM OF SQUARED DEVIATIONS **
420 REM ** FROM THE MEAN (S2) **
430     S2 = S2 + D2
440 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW X**
450 REM ** HAS BEEN ADDED**
460     K = K + 1
470 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED THEN**
480 REM ** GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
490     IF K<= N THEN GOTO 380
500 REM ** 5. COMPUTE THE STANDARD DEVIATION (D3)**
510     D3 = SQR (S2/N)
520 REM ** 6. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST **
530 REM ** THIRD DECIMAL PLACES**
540     D3 = INT (D3 * 1000 + 0.5) / 1000
550 REM ** 7. PRINT THE STANDARD DEVIATION (D3)**
560     PRINT THE STANDARD DEVIATION IS:D3
570 REM ** 8. END THE PROGRAM **
580     END

```

مثال (1) احسب الانحراف المعياري للعلامات التالية: التي حصل عليها مجموعة من

الطلاب: 65, 73, 45, 50, 75, 83, 79, 90, 61, 33, 40, 87.

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

12  
65  
73  
45  
50  
75



83  
79  
90  
61  
33  
40  
87

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE STANDARD DEVIATION IS 18.446

### تساويين

- 1- قام احد المدرسين باحصاء غيابات عشرين تلميذاً عن احد الدروس لفصل كامل ووجد أن عدد ايام الغياب كانت كما يأتي: 5، 4، 8، 12، 0، 2، 1، 5، 3، 7، 10، 9، 0، 1، 1، 1، 2، 0، 3. احسب متوسط mean عدد أيام الغيابات لهذا الدرس.
- 2- بلغ عدد الاخطاء الطباعية لخمس مكاتبات عند طباعة احدى الرسائل كما يأتي: 7، 10، 4، 6، 5. احسب مقدار التباين variance لهذه الاخطاء.
- 3- قام احد الصيادين بالاصطياد في احدى البحيرات لمدة اسبوعين حيث كانت حصيلة الصيد لتلك الفترة كما يأتي: 10، 7، 1، 3، 8، 12، 6، 4، 4، 3، 14، 9، 5، 2. احسب الوسيط median لعدد الاسماك التي تم اصطيادها.
- 4- بلغت الرواتب السنوية لخمسة موظفين في احدى الشركات كما يأتي:  
\$ 11,000، \$ 12,500، \$ 7,800، \$ 9,200، \$ 10,000. احسب متوسط الانحراف mean deviation والانحراف المعياري standard deviation لهذه الرواتب.

## 6-2 حساب الوسط الحسابي لبيانات مترابطة Mean

### النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب الوسط الحسابي arithmetic mean لاعد جداول التكرار (frequency table) الذي يتكون من مجموعة من الفئات (classes) عددها (M) ذات علامات فئة (class marks) هي  $X_1, X_2, \dots$  إلى  $X_M$  ولكل منها تكرار (frequency) هو  $F_1, F_2, \dots$  إلى  $F_M$ . استخدم لحساب المتوسط الحسابي الصيغة الرياضية التالية:

$$\bar{m} = \frac{\sum_{i=1}^M X_i F_i}{\sum_{i=1}^M F_i}$$

### خوارزمية الحل:

- 1- عيّن العدد (M) الذي يمثل عدد الحدود الدنيا (lower bounds) والحدود العليا (upper bounds) للفئات (U, L) والترددات (F) المصاحبة لهذه الفئات.
- 2- تلك من أن (M) يساوي 1 أو أكبر.
- 3- احسب المتوسط الحسابي (A) لجدول التكرار كما يأتي:
  - (أ) احسب نقطة الوسط (midpoint) لكل فئة (X) وذلك بجمع الحد الاعلى (U) والحد الأدنى (L) ثم قسمة الناتج على 2.0.
  - (ب) احسب مجموع نواتج ضرب (P) كل نقطة وسط لاية فئة مضروباً في تكرارها.
  - (ج) احسب مجموع التكرارات (S) لكافة فئات جدول التكرار.

```

230 REM ** MIDPOINT (X) AND ITS ASSOCIATED FREQUENCY (F) BY**
240 REM ** ADDING TO THE PREVIOUS SUM **
250     P = P + (X*F)
260 REM ** 3(C): COMPUTE THE SUM OF FREQUENCIES (S)**
270     S = S+F
280 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (K) TO SHOW THAT A NEW**
290 REM ** SET OF BOUNDS AND FREQ. S HAS BEEN ADDED**
300     K = K+1
310 REM ** CHECK IF ALL SETS OF BOUNDS HAVE NOT BEEN ADDED THEN**
320 REM ** GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
330     IF K<M THEN GOTO 190
340 REM ** 3(D): COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
350     A = P/S
360 REM ** 4. ROUND THE RESULT TO THE NEAREST TAIRD DECIMAL PLACES **
370     A = INT (A*1000 + 0.5)/1000
380 REM ** 5. PRINT THE ARITHMETIC MEAN**
390     PRINT "THE ARITHMETIC MEAN OF THE FREQ. TABLE IS:"A
400 REM ** 6. END THE PROGRAM **
410     END

```

احسب الوسط الحسابي للبيانات المترابطة المبينة

مثال

حدود الفئة	التكرار (F)
15-5	2
25-15	10
35-25	8
45-35	12
55-45	6
56-55	2

(د) احسب الوسط الحسابي (A) لجدول التكرار بقسمة P على S.

4- قرب النتيجة إلى ثلاث مراتب عشرية

5- اطبع النتيجة

6- توقف وأنه البرنامج.

البرنامج المستخدم:

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE ARITHMETIC MEAN OF A **
020 REM ** FREQUENCY TABLE **
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (M) OF LOWER (L) AND **
040 REM ** UPPER (U) CLASS BOUNDS AND ASSOCIATED FREQUENCY **
050 REM ** OF THE FREQUENCY TABLE**
060     INPUT M
070 REM ** 2. CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM **
080     IF M < 1 THEN END
090 REM ** 3.COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A) OF THE FREQ. TABLE **
100 REM ** USE THE COUNTER K TO COUNT CLASS BOUNDS AND **
110 REM ** FREQUENCIES (L, U, F), AND SET IT TO ZERO INITIALLY **
120     K = 0
130 REM ** SET THE ACCUMULATOR (P) OF CLASS MIDPOINTS TO ZERO **
140     P = 0.0
150 REM ** SET THE ACCUMULATOR (S) OF THE SUM OF FREQ.S TO ZERO **
160     S = 0.0
170 REM ** ENTER THE VALUES OF THE NEXT LOWER BOUND, UPPER **
180 REM ** BOUND, AND FREQUENCY (L, U, F) **
190     INPUT L, U, F
200 REM ** 3(A): COMPUTE THE MIDPOINT (X) OF THIS CLASS**
210     X = (U+L)/2.0
220 REM ** 3(B): COMPUTE THE SUM OF PRODUCTS (P) OF THE CLASS **

```

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

6  
5, 15, 3  
15, 25, 10  
25, 35, 8  
35, 45, 12  
45, 55, 6  
55, 65, 2

وسوف تظهر النتيجة على الصورة التالية:

THE ARITHMETIC MEAN OF THE FREQ. TABLE IS 33.415

مثال أحسب الوسط الحسابي للبيانات المترابطة المبينة أدناه.

حدود الفئة	التكرار (F)
30-20	3
40-30	5
50-40	4
60-50	8
70-60	2
80-70	1
90-80	6
100-90	2

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

8  
20, 30, 3  
30, 40, 5  
40, 50, 4  
50, 60, 8  
60, 70, 2  
70, 80, 1  
80, 90, 6  
90, 100, 2

وسوف تظهر النتيجة على الصورة التالية:

THE ARITHMETIC MEAN OF THE FREQ. TABLE IS 57.259

## 7-2 حساب متوسط الانحراف لبيانات مترابطة

### النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب متوسط الانحراف (Mean Deviation (M. D.) لحد جداول التكرار (frequency table) الذي يحتوي مجموعة من نقاط الوسط الفئوية (class midpoints) عددها (M) وهي  $X_1, X_2, \dots, X_M$  ولكل منها تكرار (frequency) هو  $F_1, F_2, \dots, F_M$  على الترتيب ولها متوسط حسابي (m). استخدم لحساب متوسط الانحراف الصيغة الرياضية التالية:

$$\text{M.D.} = \frac{\sum_{i=1}^M |X_i - m| F_i}{\sum_{i=1}^M F_i}$$

### خوارزمية الحل

- 1- عين العدد (M) الذي يمثل الحدود الدنيا (lower bounds) والحدود العليا (upper bound) للفئات (U, L) والترددات (F) المصاحبة لهذه الفئات.
- 2- تلكد من ان (M) يساوي 1 أو اكبر.
- 3- احسب المتوسط الحسابي (A) لجداول التكرار كما يلي:
  - (أ) احسب نقطة الوسط (mid point) لكل فئة (X) وذلك بجمع الحد الاعلى (U) والحد الأدنى (L) ثم قسمة الناتج على 2.0.
  - (ب) احسب مجموع نواتج الضرب (P) لكل نقطة وسط فئوية مضروبة في تكرارها.
  - (د) احسب المتوسط الحسابي (A) لجداول التكرار بقسمة P على S.

4- احسب بسط الصيغة الرياضية (S2) وذلك بجمع حاصل ضرب الانحراف المطلق لنقاط الوسيط (X) عن المتوسط الحسابي (A) مضروباً في التكرارات المصاحبة لكافة الفئات والتكرارات.

(أ) عين الانحراف المطلق (D3) لكل نقطة وسيط (X) عن المتوسط الحسابي (A) وذلك بطرح المتوسط الحسابي (A) من نقطة الوسيط (X) ثم أخذ القيمة المطلقة للنتيجة.

(ب) عين الانحراف المطلق عن المتوسط الحسابي X التكرار المصاحب (D2) وذلك بضرب الانحراف المطلق (D3) الذي حصلت عليه من الخطوة (أ) أعلاه في التكرار المصاحب (F) لنقطة وسيط الفئة.

(جـ) احسب البسط (S2) في الصيغة الرياضية وذلك بجمع الانحرافات المطلقة مضروبة في التكرارات (D2) التي حصلت عليها من الخطوة (ب) أعلاه.

5- احسب متوسط الانحراف (D1) للجدول وذلك بقسمة (S2) على (S).

6- قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية

7- اطبع النتيجة

8- توقف وانه البرنامج

البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE MEAN DEVIATION OF A FREQ. TABLE **
020 REM ** TELL THE COMPUTER THAT X AND F WILL BE A VECTOR **
030 REM ** OF DATA POINTS WITH A MAXIMUM OF 400 ELEMENTS **
040 REM ** note that the choice of 400 AS A LIMIT IS ARBITRARY **
050   DIM X (400), F(400)
060 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (M) OF LOWER (L) AND UPPER (U)**
070 REM ** CLASS BOUNDS AND ASSOCIATED FREQUENCIES (F)**
080   INPUT M
```

```

090 REM ** 2. CHECK N, IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM **
100     IF M<1 THEN END
110 REM ** IF M IS MORE THAN 400 THEN END THE PROGRAM**
120     IF M > 400 THEN END
130 REM ** COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A) OF THE FREQ. TABLE **
140 REM ** SET THE COUNER (J) TO 1 INITIALLY**
150     J=1
160 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (P) TO ZERO**
170     P=0.0
180 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (S) TO ZERO
190     S=0.0
200 REM ** ENTER THE NEXT SET OF (L,U,F)**
210     INPUT L, U, F(J)
220 REM ** 3(A): COMPUTE THE MIDPOINT (X) OF THIS CLASS**
230     X(J)=(L+U)/2.0
240 REM ** 3(B): COMPUTE THE SUM OF PRODUCTS (P) OF THE CLASS**
250 REM ** MIDPOINTS (X) AND ASSOCIATED FREQUENCY BY ADDING**
260 REM ** TO THE PREVIOUS SUM**
270     P=P+(X(J)*F(J))
280 REM ** 3(C): COMPUTE THE SUM OF FREQUENCIES (S) BY ADDING**
290 REM ** THE CURRENT VALUE F(J) TO THE PREVIOUS VALUE (S)**
300     S=S+F(J)
310 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW SET**
320 REM ** OF DATA POINTS HAS BEEN ADDED TO THE SUM**
330     J=J+1
340 REM ** CHECK IF ALL SETS OF DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED**
350 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
360     IF J<=M THEN GO TO 210
370 REM ** 3(D): COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
380     A = P/S
390 REM ** 4. COMPUTE THE NUMERATOR (S2)**

```



```

400 REM ** RESET (S2) TO ZERO**
410     S2 = 0.0
420 REM ** RESET THE COUNTER (J) TO 1**
430     J=1
440 REM ** 4(A): COMPUTE THE ABSOLUTE DEVIATION (D3)**
450     D3 = ABS(X(J)-A)
460 REM ** 4(B): COMPUTE (D2)**
470     D2 = D3 * F(J)
480 REM ** 4(C): COMPUTE THE SUM OF THE ABSOLUTE DEVIATIONS**
490 REM ** TIMES FREQUENCIES (S2) BY ADDING THE CURRENT**
500 REM ** VALUE OF ABS. DEV. TIMES FREQ. (D2) TO THE PREVIOUS (S2)**
510     S2=S2 + D2
520 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW**
530 REM ** MIDPOINT HAS BEEN ADDED**
540     J=J+1
550 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED**
560 REM ** THEN GO BACK TO ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
570     IF J<=M THEN GOTO 450
580 REM ** 5. COMPUTE THE MEAN DEVIATION (D1)**
590     D1 = S2/S
600 REM ** 6. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST**
610 REM ** THIRD DECIMAL PLACES**
620     D1 = INT(D1*1000 + 0.5)/1000
630 REM ** 7. PRINT THE MEAN DEVIATION (D1)**
640     PRINT 'THE MEAN DEVIATION OF THE FREQ. TABLE IS: D1
650 REM ** 8. END THE PROGRAM**
660     END

```

مثال ١ احسب متوسط الانحراف للبيانات المترابطة المبينة ادناه.

حدود الفئة	التكرار F
15-05	2
25-15	10
35-25	8
45-35	12
55-45	6
65-55	2

الحل: أدخل البيانات على المصنف التالية:

6  
5, 15, 2  
15, 25, 10  
25, 35, 8  
35, 45, 12  
45, 55, 6  
55, 65, 2

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE MEAN DEVIATION OF THE FREQ. TABLE IS 11.0

مثال احسب المتوسط الحسابي للبيانات المترابطة المبينة ادناه

حدود الفئة	التكرار F
30-20	3
40-30	5
50-40	4
60-50	8
70-60	2
80-70	1
90-80	6
100-90	2

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

8
20, 30, 3
30, 40, 5
40, 50, 4
50, 60, 8
60, 70, 2
70, 80, 1
80, 90, 6
90, 100, 2

وسوف تظهر النتيجة على الصورة التالية:

THE MEAN DEVIATION OF THE FREQ. TABLE IS 17.753



النحن الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب التباين variance لاجد جدول التكرار (frequency table) الذي يحتوي مجموعة من نقاط الوسط الفئوية (class midpoints) عددها (M) وهي  $X_1, X_2, \dots, X_M$ . ولكل منها تكرار (frequency) هو  $F_1, F_2, \dots, F_M$  إلى  $F_M$  على الترتيب، ولها متوسط حسابي (m). استخدم لحساب التباين الصيغة الرياضية التالية:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^M (X_i - m)^2 F_i}{\sum_{i=1}^M F_i}$$

### خوارزمية الحل

- 1- عن العدد (M) الذي يمثل الحدود الدنيا (lower bounds) والحدود العليا (upper bounds) للفئات (U, L) والترددات (F) المصاحبة لهذه الفئات.
- 2- تلكه من أن (M) يساوي 1 أو اكبر.
- 3- احسب المتوسط الحسابي (A) لجداول التكرار كما يأتي:
  - (أ) احسب نقطة الوسط لكل فئة (X) وذلك بجمع الحد الأعلى (U) والحد الأدنى (L) ثم قسمة الناتج على 2.0.
  - (ب) احسب مجموع نواتج الضرب (P) لكل نقطة وسط فئوية مضروباً في تكرارها.
  - (ج) احسب مجموع التكرارات (S) لكافة فئات جدول التكرار.
  - (د) احسب المتوسط الحسابي (A) لجدول التكرار بقسمة (P) على (S).
- 4- احسب بسط المصيفة الرياضية (D3) وذلك بجمع حاصل ضرب مربعات الانحرافات لنقاط الوسط (X) عن المتوسط الحسابي (A) مضروباً في التكرار المصاحب لكافة الفئات والتكرارات في الجدول كما يأتي:
  - (أ) عين الانحراف (D1) لنقطة الوسط (X) عن المتوسط (A) وذلك بطرح المتوسط (A) من نقطة الوسط (X).
  - (ب) عين مربع الانحراف (D2) لنقطة الوسط (X) عن المتوسط (A) وذلك بتربيع القيمة (D1) التي حصلت عليها من الخطوة (أ) أعلاه.
  - (ج) احسب مجموع (D3) مربعات الانحرافات مضروباً في الترددات المصاحبة وذلك بضرب مربعات الانحرافات (D2) في التردد المصاحب لها (F).
- 5- احسب التباين بقسمة (D3) على (S).
- 6- قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية.

-7 اطبع النتيجة

-8 توقف وأنه البرنامج.

### البرنامج المستخدم

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE VARIANCE OF A FREQ. TABLE**
020 REM ** TELL THE COMPUTER THAT X & F WILL BE A VECTOR **
030 REM ** OF DATA POINTS WITH A MAXIMUM OF 400 ELEMENTS**
040 REM ** NOTE THAT THE CHOICE OF 400 AS A LIMIT IS ARBITRARY**
050     DIM X(400), F(400)
060 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (M) OF LOWER (L) AND UPPER (U)**
070 REM ** CLASS BOUNDS AND ASSOCIATED FREQUENCIES (F)**
080     INPUT M
090 REM ** 2. CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM**
100     IF M<1 THEN END
110 REM ** IF M IS MORE THAN 400 THEN END THE PROGRAM**
120     IF M>400 THEN END
130 REM ** 3. COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A) OF THE FREQ. TABLE**
140 REM ** SET THE COUNTER (J) TO 1 INITIALLY**
150     J = 1
160 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (P) TO ZERO**
170     P = 0.0
180 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (S) TO ZERO**
190     S = 0.0
200 REM ** ENTER THE NEXT SET OF (L, U, F)**
210     INPUT L, U, F(J)
220 REM ** 3(A): COMPUTE THE MIDPOINT (X) OF THIS CLASS**
230     X(J) = (L + U)/2.0
240 REM ** 3(B): COMPUTE THE SUM OF PRODUCTS (P) OF THE CLASS**
250 REM ** MIDPOINTS (X) AND ASSOCIATED FREQUENCIES BY ADDING**
260 REM ** TO THE PREVIOUS SUM**

```

```

270      P = P + (X(J) * F(J))
280 REM ** 3(C): COMPUTE THE SUM OF FREQUENCIES (S) BY ADDING**
290 REM ** THE CURRENT VALUE F(J) TO THE PREVIOUS VALUE (S)**
300      S = S + F(J)
310 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW SET**
320 REM ** OF DATA POINTS HAS BEEN ADDED TO THE SUM**
330      J = J + 1
340 REM ** CHECK IF ALL SETS OF DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED**
350 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
360      IF J <= M THEN GOTO 210
370 REM ** 3(D): COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
380      A = P/S
390 REM ** 4. COMPUTE THE NUMERATOR (D3)**
400 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (D3) TO ZERO **
410      D3 = 0.0
420 REM ** RESET THE COUNTER (J) TO 1 **
430      J = 1
440 REM ** 4(A): COMPUTE THE DVIATION (D1)**
450      D1 = (X(J)-A)
460 REM ** 4(B): SQUARE THE DEVIATION (D1) AND PUT THE **
470 REM ** RESULT IN (D2) **
480      D2 = D1**2
490 REM ** 4(C): MULTIPLY THE SQUARED DEVIATION (D2) BY ITS **
500 REM ** FREQUENCY AND ACCUMULATE THE SUM OF RESULTS **
510      D3 = D3 +(D2 * F(J))
520 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW **
530 REM ** MIDPOINT HAS BEEN ADDED **
540      J = J + 1
550 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED **
560 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE **
570      IF J <= M THEN GOTO 450

```

```

580 REM ** 5. COMPUTE THE VARIANCE (V) **
590     V = D3/S
600 REM ** 6. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST THIRD **
610 REM ** DECIMAL PLACES **
620     V = INT (V * 1000 + 0.5)/1000
630 REM ** 7. PRINT THE VARIANCE (V) **
640     PRINT THE VARIANCE OF THE FREQ. TABLE IS:V
650 REM ** 8. END THE PROGRAM **
660     END
    
```

مثال      احسب التباين للبيانات المترابطة المبينة أدناه.

حدود الفئة	التكرار (F)
15-5	2
25-15	10
35-25	8
45-35	12
55-45	6
65-55	2

الحل:      أدخل البيانات على الصيغة التالية:

6  
5 , 15, 2  
15, 25, 10  
25, 35, 8  
35, 45, 12  
45, 55, 6  
55, 65, 2

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE VARIANCE THE FREQ. TABLE IS 164.342

مثال : احسب التباين للبيانات المترابطة المبينة اثناء

حدود الفئة	التكرار (F)
30-20	3
40-30	5
50-40	4
60-50	8
70-60	2
80-70	1
90-80	6
100-90	2

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

8  
20, 30, 3  
30, 40, 5  
40, 50, 4  
50, 60, 8  
60, 70, 2  
70, 80, 1  
80, 90, 6  
90, 100, 2

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE VARIANCE THE FREQ. TABLE IS 456.191

## 9.2 حساب الانحراف المعياري لبيانات مترابطة

النص الرياضي للمصالة

اكتب برنامجاً لحساب الانحراف المعياري لحد جداول التكرار الذي يحتوي مجموعة من نقاط الوسيط الفئوية (class midpoints) عددها (M) وهي  $X_1, X_2, \dots, X_M$ . ولكل منها تكرار هو  $F_1, F_2, \dots, F_M$  على الترتيب، ولها متوسط



حسابي (m). استخدم الصيغة الرياضية التالية لحساب الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^M (X_i - m)^2 F_i}{\sum_{i=1}^M F_i}}$$

### خوارزمية الحل

- 1- من العدد (M) الذي يمثل الحدود الدنيا (lower bounds) والحدود العليا (upper bounds) للفئات (U, L) والترددات (F) المصاحبة لهذه الفئات.
- 2- تلك من أن (M) يساوي 1 أو اكبر.
- 3- احسب المتوسط الحسابي (A) لجدول التكرار كما يأتي:
  - (أ) احسب نقطة الوسط لكل فئة (X) وذلك بجمع الحد الاعلى (U) والحد الأدنى (L) ثم قسمة الناتج على 2.0.
  - (ب) احسب مجموع نواتج الضرب (P) لكل نقطة وسط فئوية مضروباً في تكرارها.
  - (ج) احسب مجموع التكرارات (S) لكافة فئات جدول التكرار.
  - (د) احسب المتوسط الحسابي (A) لجدول التكرار بقسمة (P) على (S).
- 4- احسب بسط الصيغة الرياضية (D3) وذلك بجمع حاصل ضرب مربعات الانحرافات لنقاط الوسط (X) عن المتوسط الحسابي (A) مضروباً في التكرار المصاحب لكافة الفئات والتكرارات في الجدول كما يأتي:
  - (أ) عن الانحراف (D2) لنقطة الوسط (X) عن المتوسط (A) ثم قم بتربيع القيمة الناتجة.
  - (ب) احسب مجموع (D3) مربعات الانحرافات مضروباً في الترددات المصاحبة، وذلك بضرب مربع الانحراف (D2) مضروباً في التردد

- المصاحب له (F) ثم جمع نتائج هذه العمليات لكافة الفئات والترددات في الجدول حيث يصبح (D3) هو بسط المصنف الرياضية.
- 5- احسب الانحراف المعياري (S1) لجدول التكرار بقسمة (D3) على (S) ثم اخذ الجذر التربيعي للقيمة.
- 6- قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية.
- 7- اطبع النتيجة
- 8- توقف وأنه البرنامج.

### البرنامج المستخدم

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE STANDARD DEVIATION OF **
020 REM ** A FREQUENCY TABLE **
030 REM ** TELL THE COMPUTER THAT X & F WILL BE A VECTOR OF **
040 REM ** DATA POINTS WITH A MAXIMUM OF 400 ELEMENTS**
050 REM ** NOTE THAT THE CHOICE OF 400 AS A LIMIT IS ARBITRARY**
060   DIM X(400), F(400)
070 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (M) OF LOWER (L) AND UPPER (U)**
080 REM ** CLASS BOUNDS AND ASSOCIATED FREQUENCIES (F)**
090   INPUT M
100 REM ** 2.CHECK M; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM**
110   IF M < 1 THEN END
120 REM ** IF M IS MORE THAN 400 THEN END THE PROGRAM**
130   IF M > 400 THEN END
140 REM ** 3.COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A) OF THE FREQ. TABLE**
150 REM ** SET THE COUNTER (J) TO 1 INITIALLY**
160   J = 1
170 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (P) TO ZERO**
180   P = 0.0
190 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (S) TO ZERO**
200   S = 0.0

```

```

210 REM ** ENTER THE NEXT SET OF (L, U, F)**
220     INPUT L, U, F
230 REM ** 3(A): COMPUTE THE MIDPOINT (X) OF THIS CLASS**
240     X(J) = (L + U)/2.0
250 REM ** 3(B): COMPUTE THE SUM OF PRODUCTS (P) OF THE CLASS**
260 REM ** MIDPOINTS (X) AND ASSOCIATED FREQUENCIES BY**
270 REM ** ADDING TO THE PREVIOUS SUM**
280     P = P + (X(J) * F(J))
290 REM ** 3(C): COMPUTE THE SUM OF FREQUENCIES (S) BY **
300 REM ** ADDING THE CURRENT VALUE F(J) TO THE PREVIOUS ' 'UE (S)**
310     S = S + F(J)
320 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW SET**
330 REM ** OF DATA POINTS HAS BEEN ADDED TO THE SUM**
340     J = J + 1
350 REM ** CHECK IF ALL SETS OF DATA HAVE NOT BEEN ADDED**
360 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
370     IF J <= M THEN GOTO 220
380 REM ** 3(D): COMPUTE THE ARITHMETIC MEAN (A)**
390     A = P/S
400 REM ** 4. COMPUTE THE NUMERATOR (D3)**
410 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (D3) TO ZERO **
420     D3 = 0.0
430 REM ** RESET THE COUNTER (J) TO 1 **
440     J = 1
450 REM ** 4(A): COMPUTE THE SQUARED DEVIATION (D2)**
460     D2 = (X(J)-A)**2
470 REM ** 4(B): MULTIPLY THE SQUARED DEVIATION (D2) BY ITS **
480 REM ** FREQUENCY AND ACCUMULATE THE SUM OF RESULTS **
490     D3 = D3 +(D2 * F(J))
500 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW **
510 REM ** MIDPOINT HAS BEEN ADDED **
520     J = J + 1
530 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED **

```

```

540 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE **
550   IF J <= M THEN GOTO 460
560 REM ** 5. COMPUTE THE STANDARD DEVIATION (S1) **
570   S1 = (D3/S)**0.5
580 REM ** 6. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST **
590 REM ** THIRD DECIMAL PLACES **
600   S1 = INT (S1 * 1000 + 0.5)/1000
610 REM ** 7. PRINT THE STANDARD DEVIATION **
620   PRINT THE STANDARD DEVIATION OF THE FREQ. TABLE IS:S1
630 REM ** END THE PROGRAM **
640   END

```

مثال احسب الانحراف المعياري للبيانات المترابطة المبينة ادناه.

حدود الفج	التكرار (F)
15-5	2
25-15	10
35-25	8
45-35	12
55-45	6
65-55	2

الحل: أدخل البيانات على الصيغة التالية:

6  
15, 25, 10  
25, 35, 8  
35, 45, 12  
45, 55, 6  
55, 65, 2

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE STANDARD DEVIATION OF THE FREQ. TABLE IS 12.820

مثال : احسب التباين للبيانات المترابطة المبينة أدناه

حدود الفئة	التكرار (F)
30-20	3
40-30	5
50-40	4
60-50	8
70-60	2
80-70	1
90-80	6
100-90	2

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

8  
20, 30, 3  
30, 40, 5  
40, 50, 4  
50, 60, 8  
60, 70, 2  
70, 80, 1  
80, 90, 6  
90, 100, 2

ومنوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE STANDARD DEVITION OF THE FREQ. TABLE IS 21.360

## نمازين

- 1- تبين البيانات المدرجة اثناء توزيع لوزان صنابيرق البضائع الموجودة داخل احدى الحاويات:

حدود الفئة	التكرار (F)
250-200	4
300-250	7
350-300	10
400-350	12
450-400	2
500-450	1

احسب:

- (أ) الوسط الحسابي  
(ب) متوسط الانحراف  
(ج) التباين  
(د) الانحراف المعياري

- 2- تبين البيانات المدرجة اثناء توزيع أعمار البطاريات الرصاصية محسوبة بالسنوات:

حدود الفئة	التكرار (F)
1.5-0.5	2
2.5-1.5	3
3.5-2.5	10
4.5-3.5	8
5.5-4.5	4
6.5-5.5	1

احسب:

- (أ) الوسط الحسابي  
(ب) متوسط الانحراف  
(ج) التباين  
(د) الانحراف المعياري

Weighted Mean

10-2 حساب الوسط المرجح

النص الرياضي للمصالة

اكتب برنامجاً لحساب الوسط المرجح لمجموعات من تقاط البيانات هي  $N_1, N_2, \dots, N_k$  الى  $N_k$ . لها متوسطات هي  $m_1, m_2, \dots, m_k$  الى  $m_k$  على الترتيب. استخدم الصيغة الرياضية التالية لحساب الوسط المرجح:

$$m_w = \frac{N_1 m_1 + N_2 m_2 + \dots + N_k m_k}{N_1 + N_2 + \dots + N_k}$$

خوارزمية الحل

- 1- عين العدد (K) الذي يمثل ازواج ساعات المجموعات والمتوسطات المصاحبة لها (N, M) المطلوب حساب المتوسط الموزون لها.
- 2- تأكد من أن (K) يساوي 2 أو أكثر.
- 3- احسب مجموع ساعات المجموعات (S1)، ثم احسب مجموع (S2) حاصل ضرب سمة المجموعة في المتوسط المصاحب لها لكافة ازواج الساعات والمتوسطات.
- 4- احسب الوسط المرجح (W) بقسمة (S2) على (S1).
- 6- قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية.
- 7- اطبع النتيجة
- 8- توقف وأنه البرنامج.

### البرنامج المستخدم

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES WEIGHTED MEAN FOR A SERIES OF PAIRS**
020 REM ** OF GROUP SIZES AND ASSOCIATED ARITHMETIC MEANS **
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (K) OF PAIRS **
040     INPUT K
050 REM ** 2.CHECK K; IF IT IS LESS THAN 2 THEN END THE PROGRAM**
060     IF N < 2 THEN END
070 REM ** 3. COMPUTE (S1) & (S2)**
080 REM ** RESET THE COUNTER (J) TO ZERO**
090 REM ** RESET S1 & S2 TO ZERO**
100     S1 = 0.0
110     S2 = 0.0
120 REM ** ENTER THE NEXT PAIR OF GROUP SIZE & MEANS (N, M)**
130     INPUT N, M
140 REM ** COMPUTE THE GROUP SIZES (S1) BY ADDING THE CURRENT**
150 REM ** VALUE OF SIZE (N) TO THE PREVIOUS SUM (S1).**
160     S1 = S1 + N
170 REM ** COMPUTE THE SUM OF PRODUCTS (S2) OF GROUP SIZES AND**
180 REM ** ASSOCIATED MEANS**
190     S2 = S2 + (N*M)
200 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW PAIR**
210 REM ** HAS BEEN ADDED**
220     J = J + 1
230 REM ** CHECK IF ALL PAIRS OF DATA HAVE NOT BEEN ADDED THEN**
240 REM ** GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
250     IF J < K THEN GOTO 130
260 REM ** 4. COMPUTE THE WEIGHTED MEAN (W)**
270     W = S2/S1
280 REM ** 5. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST**
290 REM ** THIRD DECIMAL PLACES **
300     W = INT (W * 1000 + 0.5)/1000
310 REM ** 6. PRINT THE WEIGHTED MEAN (W) **
320     PRINT THE WEIGHTED MEAN IS:W
330 REM ** 7. END THE PROGRAM **
340     END

```



**مثال** بعد اجراء نفس الاختيار على مجموعتين من الطلاب في صف واحد، كانت النتائج كما يأتي:

حصلت المجموعة الاولى (40 طالباً) على متوسط مقداره (62)، بينما حصلت المجموعة الثانية (33 طالباً) على متوسط مقداره (58). احسب الوسط المرجح لهاتين المجموعتين.

**الحل:** ادخل البيانات على الصيغة التالية:

2  
40, 62  
33, 58

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE WEIGHTED MEAN IS 57.065

**مثال** قامت إحدى الشركات الصناعية بتوزيع المكافآت بمناسبة انتهاء السنة الاولى من عمر الشركة، حيث حصلت المجموعة الاولى من العمال البالغ عددهم 50 عاملاً على 3500 دينار، بينما حصلت المجموعة الثانية من الموظفين البالغ عددهم 25 موظفاً على 1500 دينار. احسب الوسط المرجح للمكافآت المستلمة من كلا المجموعتين.

**الحل:** ادخل البيانات على الصيغة التالية:

2  
50, 3500  
25, 1500

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE WEIGHTED MEAN IS 2833.333

## Harmonic Mean

## 11-2 حساب الوسط التوافقي

### النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب الوسط التوافقي لمجموعة من نقاط البيانات هي  $X_1, X_2, \dots, X_N$  باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$m_h = \frac{N}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \dots + \frac{1}{X_N}}$$

### خوارزمية الحل

- 1- عين العدد (N) الذي يمثل نقاط البيانات (X) المطلوب حساب المتوسط التوافقي لها.
- 2- تأكد من أن (N) يساوي 1 أو أكبر.
- 3- احسب مقام الصيغة الرياضية وذلك بجمع مقلوبات (S) نقاط البيانات:
- 4- احسب الوسط التوافقي (H) بقسمة (N) على (S).
- 5- قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية.
- 7- اطبع النتيجة
- 8- توقف وأنه البرنامج.

### البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE HARMONIC MEAN OF A **
020 REM ** SERIES OF DATA POINTS **
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (N) OF DATA POINTS (X) **
040     INPUT N
050 REM ** 2.CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM**
060     IF N < 1 THEN END
070 REM ** 3.COMPUTE THE SUM S OF THE RECIPROCAL OF DATA POINTS**
080 REM ** RESET THE COUNTER (K) TO ZERO**
```

```

090      K = 0
100 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (S) TO ZERO**
110      S = 0.0
120 REM ** ENTER THE NEXT DATA POINT (X)**
130      INPUT X
140 REM ** COMPUTE THE SUM (S) OF RECIPROCALLS**
150      S = S + (1.0/X)
160 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER K TO SHOW THAT A NEW **
170 REM ** DATA POINT HAS BEEN ADDED**
180      K = K + 1
190 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED THEN**
200 REM ** GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
210      IF K <= N THEN GOTO 130
220 REM ** 4. COMPUTE THE HARMONIC MEAN (H)**
230      H = N/S
240 REM ** 5. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST THIRD**
250 REM ** DECIMAL PLACES **
260      H = INT (H * 1000 + 0.5)/1000
270 REM ** 6. PRINT THE HARMONIC MEAN (H) **
280      PRINT "THE HARMONIC MEAN IS:" H
290 REM ** 7. END THE PROGRAM **
300      END

```

**مثال** قطعت إحدى السيارات المسافة بين بغداد وسامراء بسرعة تساوي 100 كم في الساعة، ثم عادت من سامراء إلى بغداد بسرعة 130 كم في الساعة. فإذا طعت أن المسافة بين بغداد وسامراء هي 120 كم، احسب متوسط سرعة السيارة من بغداد إلى سامراء وبالعكس.

**الحل:** أدخل البيانات على الصيغة التالية:

```

2
100
130

```

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE HARMONIC MEAN IS 113.043

**مثال** قطعت إحدى الطائرات المسافة بين المدينة (أ) والمدينة (ب) بسرعة 900 كم في الساعة، ثم عادت من المدينة (ب) إلى (أ) بسرعة 750 كم في الساعة. احسب معدل السرعة لكامل الرحلة.

**الحل:** أدخل البيانات على الصيغة التالية:

2  
900  
750

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE HARMONIC MEAN IS 818.181



**النص الرياضي للمسألة**

اكتب برنامجاً لحساب الوسط الهندسي لمجموعة من نقاط البيانات هي  $X_1, X_2, \dots, X_N$ . باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$m_g = \sqrt[N]{X_1 \cdot X_2 \cdot \dots \cdot X_N}$$

**خوارزمية الحل**

- 1- عين العدد (K) الذي يمثل نقاط البيانات (P) المطلوب حساب المتوسط الهندسي لها.
- 2- تككد من أن كلاً من (K) و (P) يساوي 1 أو أكبر.
- 3- عين حاصل الضرب (P2) الناتج من ضرب نقاط بيانات عددها (K): أي احسب  $P_1 \times P_2 \times \dots \times P_K$  على أن تكون قيمة أية نقطة بيانات (P) أكبر من صفر.
- 4- احسب الوسط الهندسي (G) وذلك بتخذ الجذر (K) لنتائج حاصل الضرب (P2) الذي حصلت عليه من الخطوة (3) أعلاه.

5- قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية.

7- اطبع النتيجة

8- توقف وأنت البرنامج.

البرنامج المستخدم

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE GEOMETRIC MEAN OF A SERIES **
020 REM ** OF DATA POINTS **
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (K) OF DATA POINTS (P) **
040     INPUT K
050 REM ** 2. CHECK K; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM**
060     IF K < 1 THEN END
070 REM ** 3. COMPUTE THE PRODUCT OF DATA POINTS IN THE SERIES**
080 REM ** RESET THE ACCUMULATOR OF PRODUCT (P2) TO 1**
090     P2 = 1.0
100 REM ** REST THE COUNTER (J) TO ZERO**
110     J = 0
120 REM ** ENTER THE NEXT DATA POINT**
130     INPUT P
140 REM ** CHECK P; IF IT IS EQUAL TO ZERO, THEN END THE PROGRAM**
150     IF P <= 0.0 THEN END
160 REM ** COMPUTE THE PRODUCT OF THE CURRENT DATA POINT (P)
170 REM ** AND THE PREVIOUS VALUE OF THE PRODUCT (P2)**
180     P2 = P2 * P
190 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (J) TO SHOW THAT A NEW DATA**
200 REM ** POINT HAS BEEN ADDED**
210     J = J + 1
220 REM ** CHECK IF ALL DATA POINTS HAVE NOT BEEN ADDED**
230 REM ** THEN GO BACK TO GET ANOTHER; OTHERWISE CONTINUE**
240     IF J > K THEN GOTO 130
250 REM ** 4. TAKE THE KTH ROOT OF THE PRODUCT (P2) TO GET**
260 REM ** THE GEOMETIC MEAN (G)**
270     G = P2 ** (1.0/K)
280 REM ** 5. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST**

```

```

290 REM ** THIRD DECIMAL PLACES **
300     G = INT (G * 1000 + 0.5)/1000
310 REM ** 6. PRINT THE GEOMETRIC MEAN (G) **
320     PRINT THE GEOMETRIC MEAN IS:G
330 REM ** 7. END THE PROGRAM **
340     END
    
```

مثال      احسب الوسط الهندسي لنقاط البيانات التالية: 5، 7، 11، 13، 16.

الحل:      أدخل البيانات على الصيغة التالية:

5  
5  
7  
11  
13  
16

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE GEOMETRIC MEAN IS 9.565

مثال      يبين الجدول التالي قيم المبالغ التي قام بإيداعها أحد الأشخاص في حسابه في البنك الإسلامي على مدى خمسة شهور. احسب الوسط الهندسي للمبالغ المودعة.

المبلغ المودع (دينار)	الشهر
450	نيسان
630	مارس
330	حزيران
725	تموز
612	أب

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

5  
450  
630  
330  
725  
612

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE GEOMETRIC MEAN IS 529.214

نماورين

- 1- قام احد مندوبي المبيعات لاحدى الشركات بجولة لمدة أربعة ايام باستخدام سيارته الخاصة لتسويق احد المنتجات، حيث يقطع كل يوم 300 كم، وكان يسير بسرعة 90 كم في الساعة في اليوم الاول والاخير من الرحلة، بينما كان يسير بسرعة 100 كم في الساعة في اليوم الثاني، و 120 كم في الساعة في اليوم الثالث. ما هو معدل سرعته لكامل الرحلة؟
- 2- في احدى المعاهد التقنية كان هناك 25 طالباً في السنة الاولى قد حصلوا على معدل علامات 76، بينما حصل 40 طالباً في السنة الثانية على معدل 82، في حين كان معدل طلاب السنة الثالثة -الذين يبلغ عددهم 52 طالباً- هو 68. احسب معدل العلامات لكل فئة من الطلاب.
- 3- قام خمسة اشخاص بتسليم ما استحق عليهم من الزكاة إلى احدى الجمعيات الخيرية لغرض توزيعها على الفقراء، حيث كانت المبالغ التي سلموها كما يلي:

المبلغ (دينار)	الشخص
1450	محمد
720	أحمد
650	ياسين
2300	طه

احسب الوسط الهندسي للمبالغ الميية





## الفصل الرابع

### العزوم والتفرطح

#### 1-4) الالتواء (SKEWNESS)

تعريف: وهو انتفاء التماثل، ومن الناحية الاحصائية هو عدم وجود تماثل، ويمكن قياسها عن طريق (س، و، م).

حيث :-

تن - م > ∴ ∴ الالتواء سالب.

تن - م < ∴ ∴ الالتواء موجب.

ومقياس الالتواء هذا يسمى بمعامل الالتواء وهو قيمة نسبية غير متأثرة بوحدات القياس.

ويمكن حساب معامل الالتواء عن طريق:-

1) الوسط الحسابي (تن) والوسيط (و) والمتوال (م)

∴ يعطينا معامل بيرسون الأول .

(1-4).....

(2-4).....

(3-4).....

$$\begin{aligned} \frac{\bar{m}-\bar{w}}{e} &= \alpha_1 \\ \frac{(\bar{m}-\bar{w})^3}{e} &= \alpha_2 \\ \frac{(\bar{m}-\bar{w})^3}{e^2} &= \alpha_3 \end{aligned}$$

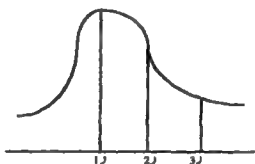
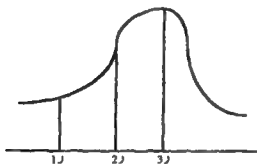
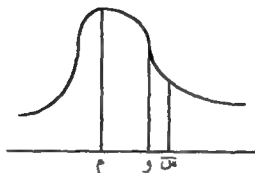
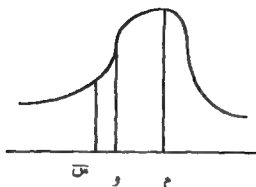
وهذه صور مختلفة من معامل بيرسون الأول

(2) باستخدام الريبعات (1)، (2)، (3)

⇐ يعطينا معامل بيرسون الثاني

$$\frac{(1-2)-(2-3)}{1-3} = \alpha_2$$

$$\frac{1+2-3}{1-3} = \alpha_1$$



$$1-2 > 2-3$$

الالتواء سالب.

$$1-2 < 2-3$$

⇐ الالتواء موجب.

مثال: جد معامل الالتواء بطرقه المختلفة لفئات الأجر التالية:

فئات الأجر	-40	-60	-80	-100	-120	المجموع
ت	8	12	20	8	2	50

علماً بأن:

$$\bar{m} = 83.6, \bar{w} = 85, \bar{m} = 88, \bar{r}_1 = 67.5, \bar{r}_2 = 85, \bar{r}_3 = 97.5, \bar{e} = 20.95$$

$$0.21 = \frac{88 - 83.6}{20.95} = \frac{\bar{m} - \bar{m}}{\bar{e}} = \alpha_1$$

$$0.21 = \frac{(85 - 83.6)^3}{20.95} = \frac{(\bar{w} - \bar{m})^3}{\bar{e}} = \alpha_1$$

$$0.22 = \frac{(88 - 85)^3}{(20.95)^2} = \frac{(\bar{m} - \bar{w})^3}{\bar{e}^2} = \alpha_1$$

$$0.2 = \frac{170 - 165}{30} = \frac{67.5 + (85)^2 - 97.5}{67.5 - 97.5} = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2^2 - \bar{r}_3}{\bar{r}_1 - \bar{r}_3} = \alpha_2$$

واستخدم العلماء مبدأ العزوم (Momenis) للاستدلال على الالتواء، والعزم درجات، مما يقودنا لتعريف العزم الواوي

$$(6-4) \dots \dots \dots \boxed{\bar{m} = \sum (\bar{m} - \bar{r}_1) (\bar{r}_1)} \dots \dots \dots$$

ويسمى (م) بالعزم الواوي حول الثابت (أ) وقد يكون هذا الثابت:-

(1) أ- صفر. وتسمى بذلك العزوم حول الصفر ويرمز لها بالرمز (م<sub>ص</sub>). فإذا كان:

$$(7-4) \dots \dots \dots \boxed{\bar{m}_1 = \sum \bar{m} \bar{r}_1 (\bar{r}_1) = \bar{m}} \leftarrow 1 = \bar{w}$$

$$\bar{m}_1 = \sum \bar{m} \bar{r}_1 (\bar{r}_1) = \bar{m}$$

$$\bar{m}_2 = 2 = \bar{w} \leftarrow \bar{m}_2 = \sum \bar{m} \bar{r}_1^2 (\bar{r}_1) = \bar{m} \bar{r}_1^2 (\bar{r}_1)$$

$$(8-4) \dots \dots \dots \boxed{\bar{m}_2 = \sum \bar{m} \bar{r}_1^2 (\bar{r}_1) = \bar{m} \bar{r}_1^2 (\bar{r}_1)} \dots \dots \dots$$

$$\bar{m}_3 = 3 = \bar{w} \leftarrow \bar{m}_3 = \sum \bar{m} \bar{r}_1^3 (\bar{r}_1)$$

$$(9-4) \dots \dots \dots \boxed{\bar{m}_3 = \sum \bar{m} \bar{r}_1^3 (\bar{r}_1)} \dots \dots \dots$$

(10-4).....

(2) أَوْقَ . وتسمى بذلك العزوم حول الوسط الحسابي ويرمز لها بالرمز (م).  
فإذا كان:-

(11-4).....

(12-4).....

(13-4).....

(14-4).....

وتستخدم هذه العزوم للتعبير عن  $(\overline{m})$  ،  $(t^2)$  ،  $e^2$ .

وبذلك فأننا نستطيع التعبير عن المعادلة:

ع<sup>2</sup> - ت<sup>2</sup> - م<sup>2</sup> بطريقة العزوم حيث: ع<sup>2</sup> = ت<sup>2</sup> - م<sup>2</sup> ..... (4-15)

وع<sup>2</sup> = م<sup>2</sup> - 2، ت<sup>2</sup> = 2 - م<sup>2</sup>، ق<sup>2</sup> = م<sup>2</sup> - 1، وكذلك ع<sup>2</sup> = 2 - م<sup>2</sup>، ت<sup>2</sup> = 2 - م<sup>2</sup>، ق<sup>2</sup> = م<sup>2</sup> - 1،  
وبالتعويض في العلاقة (4-15) أعلاه:

$$1\overset{\cdot}{\text{P}} - 2\overset{\cdot}{\text{P}} = 2\overset{\cdot}{\text{P}} \Leftarrow$$

ويمكننا أيضا إيجاد قيمة (م<sub>3</sub>) بنفس الطريقة:

$$^3(\overline{م-م}) \supset \frac{1}{ن} = م_3$$

$$(^3\overline{م-م}^2 + ^3\overline{م-م}^3 + ^3\overline{م-م}^4) \supset \frac{1}{ن} =$$

$$\left[ ^3\overline{م-م} - (^2\overline{م-م})^2 + (^2\overline{م-م})^3 - (^2\overline{م-م})^4 \right] \frac{1}{ن} =$$

$$\left[ ^3\left(\frac{م-م}{ن}\right) - (^2\overline{م-م})\left(\frac{م-م}{ن}\right)^2 + (^2\overline{م-م})^3\left(\frac{م-م}{ن}\right) - (^2\overline{م-م})^4\left(\frac{م-م}{ن}\right) \right] \frac{1}{ن} =$$

$$^3\left(\frac{م-م}{ن}\right) - (^2\overline{م-م})\left(\frac{م-م}{ن}\right)^2 + (^2\overline{م-م})^3\left(\frac{م-م}{ن}\right) - (^2\overline{م-م})^4\left(\frac{م-م}{ن}\right) =$$

(16-4).....

$$م_3 = 3م - 3م \times م_2 + 2م_1^3$$

ويمكننا أيضا إيجاد (م<sub>4</sub>) وب نفس الطريقة

$$^4(\overline{م-م}) \supset \frac{1}{ن} = م_4$$

$$(^4\overline{م-م}^3 + ^4\overline{م-م}^4 + ^4\overline{م-م}^5 + ^4\overline{م-م}^6) \supset \frac{1}{ن} =$$

$$\left[ ^4\overline{م-م} + (^3\overline{م-م})^2 - (^3\overline{م-م})^3 + (^3\overline{م-م})^4 - (^3\overline{م-م})^5 \right] \frac{1}{ن} =$$

$$\left[ ^4\left(\frac{م-م}{ن}\right) + (^3\overline{م-م})\left(\frac{م-م}{ن}\right)^2 - (^3\overline{م-م})^3\left(\frac{م-م}{ن}\right) + (^3\overline{م-م})^4\left(\frac{م-م}{ن}\right) - (^3\overline{م-م})^5\left(\frac{م-م}{ن}\right) \right] \frac{1}{ن} =$$

$$^4\left(\frac{م-م}{ن}\right) + (^3\overline{م-م})\left(\frac{م-م}{ن}\right)^2 - (^3\overline{م-م})^3\left(\frac{م-م}{ن}\right) + (^3\overline{م-م})^4\left(\frac{م-م}{ن}\right) - (^3\overline{م-م})^5\left(\frac{م-م}{ن}\right) =$$

$$4\dot{m} - 4\dot{m} + 3\dot{m} \times 2\dot{m} - 3\dot{m} + 4\dot{m}$$

$$4\dot{m} - 4\dot{m} + 3\dot{m} \times 2\dot{m} - 3\dot{m} + 4\dot{m} = 4\dot{m}$$

وقد خلص العلماء من خلال ابحاث كثير في العزوم الى معامل الالتواء:-

$$\frac{3}{2} \frac{\dot{m}}{\dot{m}} = {}_1\alpha$$

حيث يأخذ  $({}_1\alpha)$  اشارة  $({}_3\dot{m})$  فاذا كانت :-

$$({}_1\alpha) = \therefore \Leftarrow \text{التوزيع متماثل}$$

$$({}_1\alpha) > \therefore \Leftarrow \text{الالتواء سالب}$$

$$({}_1\alpha) < \therefore \Leftarrow \text{الالتواء موجب}$$

حيث  ${}_1\alpha$  ترمز الى معامل الالتواء

كما قادتهم لمعامل التفرطح والذي يرمز له بالرمز  ${}_2\alpha$

$$\frac{4}{2} \frac{\dot{m}}{\dot{m}} = {}_2\alpha$$

فاذا كان:-

$$({}_2\alpha) = 3 \Leftarrow \text{المنحنى معتدل التفرطح}$$

$$({}_2\alpha) > 3 \Leftarrow \text{المنحنى مفرطح}$$

$$({}_2\alpha) < 3 \Leftarrow \text{المنحنى مدبب}$$

والسبب في اخذ هذه القيم ان للتوزيع المعتاد

$$\therefore {}_1\alpha$$

$${}_3 - {}_2\alpha$$

مثال: البيانات التالية تمثل فئات الاجر الاسبوعي لـ 50 عامل مبيتة كما يلي:

فئات الاجر	-40	-60	-80	-100	140-120
التكرار	8	12	20	8	2

(المطلوب : 1) إيجاد العزم الاول والثاني والثالث والرابع حول مَـ

(2) إيجاد العزم الاول والثاني والثالث والرابع حول الصفر

(3) معامل الالتواء ونوع الالتواء

(4) معامل التفرطح ونوعه

الحل: نكون جدول الحل التالي.

الفئات	كـ	مـ	م <sup>2</sup> كـ	م <sup>3</sup> كـ	م <sup>4</sup> كـ
-40	8	50	2500	125000	6250000
-60	12	70	4900	343000	24010000
-80	20	90	8100	729000	65618000
-100	8	110	12100	1331000	14641000
-120	2	130	16900	2197000	28561000
المجموع	50				

فئات	كـ	مـ	م <sup>2</sup> كـ	م <sup>3</sup> كـ	م <sup>4</sup> كـ
-40	8	50	400	1000000	50000000
-60	12	70	840	4116000	288120000
-80	20	90	1800	14580000	1312200000
-100	8	110	880	10648000	11711280000
-120	2	130	260	4394000	571220000
المجموع	50	-	4180	371400	3392820000

س	ح <sup>٢</sup> ك		ح <sup>٣</sup> ك	ح <sup>٤</sup> ك	س	س <sup>٢</sup> ك
40-	320-	12800	512000-	20840000	2-	16-
20-	240-	4800	96000-	1920000	1-	12-
0	0	0	0	0	0	0
20	160	3200	64000	1280000	1	8
40	80	3200	128000	5120000	2	4
/	320	24000	416000	29160000	/	16-

م <sup>٢</sup> ك	م <sup>٣</sup> ك	م <sup>٤</sup> ك	(م <sup>٢</sup> س) ك	(م <sup>٣</sup> س) ك	(م <sup>٤</sup> س) ك
32	64	128	-268.8	9031.68	303464.448
12	12-	12	-163.2	.2219	30185.472
0	0	0	128	819.2	5242.88
8	8	8	211.2	5575.68	147197.952
8	16	32	212.8	4305.92	199794.688
60	52-	180		21952	685885.44

$$83.6 = \frac{4180}{50} = \sum_{\text{م<sup>٢</sup> ك}} \frac{1}{\text{م<sup>٢</sup> ك}} = \bar{m}_1(1)$$

$$7428 = \frac{371400}{50} = \sum_{\text{م<sup>٣</sup> ك}} \frac{1}{\text{م<sup>٣</sup> ك}} = \bar{m}_2(2)$$

$$69476 = \frac{34738000}{50} = \sum_{\text{م<sup>٤</sup> ك}} \frac{1}{\text{م<sup>٤</sup> ك}} = \bar{m}_3(3)$$



$$67856400 = \frac{3392820000}{50} = {}_R^4 \text{ من } \text{ك} \supset \frac{1}{\text{ك} \sum} = {}_R^4 \bar{m} \quad (4)$$

$$83.6 = 90 + \frac{320-}{50} = {}_R^2 \text{ ك} \supset \frac{1}{\text{ك} \sum} = {}_R^2 \bar{m} \quad (5)$$

$$480 = \frac{204000}{50} = {}_R^2 \text{ ك} \supset \frac{1}{\text{ك} \sum} = {}_R^2 \bar{m} \quad (6)$$

$$8320- = \frac{416000-}{50} = {}_R^3 \text{ ك} \supset \frac{1}{\text{ك} \sum} = {}_R^3 \bar{m} \quad (7)$$

$$583200 = \frac{29160000}{50} = {}_R^4 \text{ ك} \supset \frac{1}{\text{ك} \sum} = {}_R^4 \bar{m} \quad (8)$$

العزوم حول نقطة الأصل:

$$..32- = \frac{16-}{50} = {}_R^1 \text{ من } \text{ك} \supset \frac{1}{\text{ك} \sum} = {}_R^1 \bar{m} \quad (9)$$

$$1.2 = \frac{60}{50} = {}_R^2 \text{ من } \text{ك} \supset \frac{1}{\text{ك} \sum} = {}_R^2 \bar{m} \quad (10)$$

$$1.04- = \frac{52-}{50} = {}_R^3 \text{ من } \text{ك} \supset \frac{1}{\text{ك} \sum} = {}_R^3 \bar{m} \quad (11)$$

$$3.6 = \frac{180}{50} = {}_R^4 \text{ من } \text{ك} \supset \frac{1}{\text{ك} \sum} = {}_R^4 \bar{m} \quad (12)$$

العزوم حول الوسط الحسابي.

$$\therefore = {}_R^1 \text{ من } (\text{من} - \text{ك}) \supset \frac{1}{\text{ك} \sum} = {}_R^1 \bar{m} \quad (13)$$

$$439.04 = \frac{21952}{50} = {}_R^2 \text{ من } (\text{من} - \text{ك}) \supset \frac{1}{\text{ك} \sum} = {}_R^2 \bar{m} \quad (14)$$

$$13717.7088 = \frac{685885.44}{50} = {}_R^3 \text{ من } (\text{من} - \text{ك}) \supset \frac{1}{\text{ك} \sum} = {}_R^3 \bar{m} \quad (15)$$

$$475939.6352 = \frac{23796981.76}{50} = \sum_{k=1}^3 \left( \frac{1}{k} \right) = \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k} = 1.609438 (16)$$

وعليه فان معامل الالتواء باستخدام العزوم

$$2 = \frac{8 \times 18817551}{8462748} = \frac{2(13717.7088)}{3(439.04)} = \frac{2}{3} = \alpha_1$$

$$3 > 2.47 = \frac{475939.635}{192756.12} = \frac{475939.635}{2(439.04)} = \frac{4}{2} = \alpha_2$$

وهذا يعني ان المنحنى مفرطح

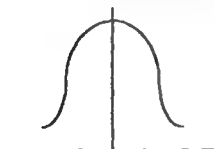
## الفصل الخامس

### التوزيع الطبيعي

#### 1-5 شكل المنحنى الطبيعي

يتخذ المنحنى الطبيعي شكل الجرس ، وهو متماثل حول نقطة الوسط أي ان العمود النازل من اعلى نقطة في المنحنى على المحور الافقي يقسم المنحنى الى منطقتين متساويتين كما هو موضح بالشكل جانباً وهو يمثل التوزيع الطبيعي.

وهو من اهم التوزيعات الاحتمالية ومعادلته



$$y = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

حيث:  $\pi$  النسبة التقريبية =  $\frac{22}{7}$  أو 3.14

$\sigma$ : الانحراف المعياري للتوزيع الطبيعي

$\mu$ : الوسط الحسابي للتوزيع

$2.718$  : العدد النيري =

$\sigma$ : الانحراف المعياري للتوزيع

سر: القيمة المقابلة للملاحظة سر

#### 2-5: خصائص التوزيع الطبيعي

1- شكله يشبه الجرس

2- متماثل حول الوسط.

3- الوسط الحسابي = الوسيط - المنوال لهذا التوزيع

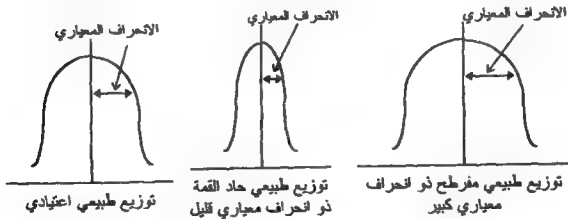
4- المساحة تحت المنحنى الطبيعي = 1

5- تحديد نسبة أي جزء محصور بين قيمتين تحت المنحنى يتم بمعرفة الوسط والانحراف المعياري للتوزيع.

6- تقل قيمة  $\sigma$  كلما اتجهت  $\sigma$  نحو  $\infty$  ولكنها لا يمكن ان تصبح صفرا الا في اللانهاية وهذا غير ملموس.

وحتى يكون التوزيع الطبيعي توزيعا معياريا فيتوجب ان يكون متوسطه الحسابي صفرا وتباينه 1. لذا فان خواص التوزيع الطبيعي المعياري هي نفس خواص التوزيع الطبيعي الاصلي اللهم الا زيادة الشرط الاخير وهو ان يكون وسطه الحسابي = صفرا. وتباينه يساوي 1.

وهناك صور اخرى لمنحنى التوزيع الطبيعي تعتمد على الانحراف المعياري للتوزيع. فكلما زاد الانحراف المعياري معنى ذلك انه الزيادة في تشتت البيانات عن وسطها الحسابي ولذا يزداد تفرطح المنحنى والاشكال التالية توضح هذا المفهوم:



### 3-5 جداول التوزيع الطبيعي للمصاحات:

(1) صممت هذه الجداول لتعمل على تخفيف عناء إيجاد مساحة معينة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

(2) المساهمة في إيجاد احتمال اية مشاهدة من مشاهدات التوزيع الطبيعي غير المعياري وذلك بتحويل قيم المشاهدات الى درجات معيارية من العلاقة.

لذا يتوجب معرفة الوسط الحسابي للتوزيع وانحرافه المعياري

$$y_r = \frac{x_r - \bar{x}}{s_x}$$

(3) يجب معرفة ان قيم  $y_r$  للدرجات المعيارية واقعة بين  $-4 \leq y_r \leq 4$  واية قيمة معيارية تزيد عن هذا الحد فيكون هناك خطأ حسابي.

كيفية إيجاد المساحة تحت المنحنى باستخدام الجدول. تتبع الخطوات التالية:-

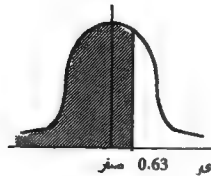
(1) نحول كل قيمة مشاهدة من التوزيع الطبيعي الى قيمة معيارية حسب العلاقة:

$$y_r = \frac{x_r - \bar{x}}{s_x}$$

2- بعد الحصول على القيمة المعيارية نلجأ الى جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد القيم المقابلة حيث ان العمود الاول يمثل القيم المعيارية والاقصى يشمل الجزئيات للقيم المعيارية وبعد القراءة الرأسية الى اسفل ثم افقي نجد القيم المناظرة المطلوبة والتي تدل على المساحة والاحتمال المطلوب.

والجدول ادناه يمثل جزءا من الجدول الكلي ولو اردنا إيجاد القيمة المناظرة لـ

ى- 0.63 ثم نقرأ رقم تقاطع القيمة الرأسية مع الافقية فتكون هي القيمة المناظرة لى- 0.63 ونلاحظ ان القراءة تشير الى 0.2357 وهذا يشير الى احتمال وقوع المشاهدة المناظرة لى ر . وهي تمثل المساحة المشار لها في الشكل التالي ونلاحظ من الشكل ان الخط المار بنقطة ى- صفر يقسم المساحة الكلية الى قسمين متساويين كل منهما 0.5000 وعند حساب مساحة تبدأ بالصفر. وتنتهي بقيمة ى فان المساحة المطلوبة هي القيمة المأخوذة من الجدول ادناه كما اسلفنا في المثال السابق.



اما اذا تصادف وجود قيمة معيارية سالبة فاننا نأخذ مثلتها الموجبة ونجدها من الجدول باستخدام خاصية التماثل المحوري:

حيث ان الجدول صمم فقط للقيم المعيارية الموجبة. والمساحة المحصورة عادة تحدها معطيات السؤال.

ى	00	01	0200	03	04	05	06	07	08	09
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0229	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753	
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1197	0,1217	0,1255	0,1293	0,1321	0,1368	0,1406	0,1443		0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1773	0,1808	0,1879	
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157		0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549

#### 5 - 4: تطبيق على المنحنى الطبيعي من خلال مسائل عملية:

يمكن اعطاء الأمثلة التالية لتغطي جميع ما ورد من ملاحظات:

مثال: أوجد الاحتمال لما يلي (مساحات المناطق المحددة بالقيم المعيارية)

أ - ل (ى > 1)      ب - ل (ى < 1)

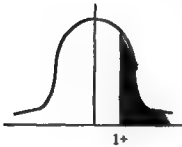
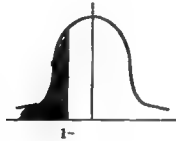
ج- ل (  $0 < y < 2.3$  ) د - ل (  $-1.35 < y < 2.38$  )

هـ- ل (  $1.42 < y < 3.1$  )

الحل: نبدأ بحل مثل هذه الأسئلة برسوم توضيحية للمنحنيات لتحديد المساحة المطلوبة ثم إيجادها من الجداول المعطاة

أ - ل (  $y > 1$  ) -  $0.5000 - 0.3413 - 0.1587$

= مساحة نصف المنحنى - المساحة الواقعة تحت ص = 1 -



ب- ل (  $y < 1$  ) -  $0.5000 - 0.3413 - 0.1587$

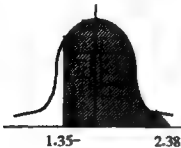


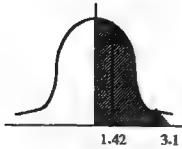
ج- ل (  $0 < y < 2.3$  ) -  $0.4893$

د - ل (  $-1.35 < y < 2.38$  )

=  $2\sigma + 1\sigma$

=  $0.4115 + 0.4913 - 0.9028$





هـ- ل (  $3.1 > y > 1.42$  )

$$= 0.4990 - 0.4222$$

$$= 0.0768$$

مثال: تقدم عشرون الف طالب لامتحان عام وكان توزيع علاماتهم قريبا في التوزيع الطبيعي، فاذا كان الوسط الحسابي للعلامات 70 والانحراف المعياري 5، فأوجد :-

1- عدد من تقع علاماتهم بين 70 - 80 درجة

2- عدد من تقع علاماتهم بين 65 - 75 درجة

3- عدد من تقل علاماتهم عن 60

4- عدد من تزيد علاماتهم عن 80

5- عدد من تزيد علاماتهم عن 60

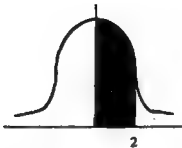
6- عدد الذين تقل علاماتهم عن 80 مع من تزيد او تساوي 80

الحل:

$$1- \text{ ل } \left( \frac{70-80}{5} > y > \frac{70-70}{5} \right)$$

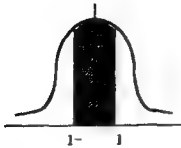
$$= \text{ ل } \left( \frac{10}{5} > y > 0 \right) = \text{ ل } (2 > y)$$

$$= 0.4773$$



عدد الطلاب =  $4773 \times 20000 = 9546$  طالبا





$$-2 \text{ ل } \left( \frac{70-75}{5} > \text{ى} > \frac{70-65}{5} \right)$$

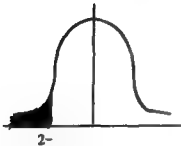
$$= \text{ل } (-1 > \text{ى} > 1) = 1\text{م} + 2\text{م}$$

$$= 0.3413 + 0.4313$$

$$= 0.6826$$

عدد الطلاب المطلوب =  $20000 \times 0.6826$

= 13652 طالب



$$-3 \text{ ل } \left( \frac{70-60}{5} > \text{ى} \right)$$

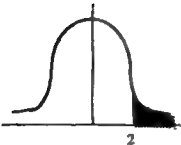
$$= \text{ل } (\text{ى} > -2)$$

$$= 0.5000 - 0.4773$$

$$= 0.0227$$

عدد الطلاب المطلوب =  $20000 \times 0.0227$

= 454 طالباً



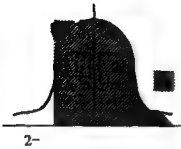
$$-4 \text{ ل } \left( \frac{70-80}{5} < \text{ى} \right) = 2$$

$$= 0.5000 - 0.4773$$

$$= 0.0227$$

عدد الطلاب المطلوب =  $20000 \times 0.0227$

= 454 طالباً



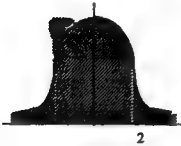
$$-5 \quad L = \left( \frac{70-60}{5} < Y \right) = L(ص < 2)$$

$$= 0.4772 + 0.5000 =$$

$$= 0.9773$$

$$\text{عدد الطلاب} = 20000 \times 0.9773 =$$

$$= 1546 \text{ طالبا}$$



$$-6 \quad L = \left( \frac{70-80}{5} < Y \right) + \left( \frac{70-80}{5} > Y \right)$$

$$L(Y < 2) + L(Y > 2)$$

$$= 0.9773 + 0.0227 = 1$$

$$\text{عددهم} = 20000$$

اما اذا استخدمنا جدول التوزيع الطبيعي التجميعي نحسب الاحتمالات على النحو:  
ولتوضيح هذا المفهوم نورد الأمثلة التالية:

مثال: احسب الاحتمالات التالية باستخدام جدول التوزيع المعتاد التجميعي:

$$(1) \text{ ح } (1 > Y) =$$

$$(2) \text{ ح } (-1.35 < Y < 2.1)$$

$$(3) \text{ ح } (1.2 < Y < 3)$$

$$(4) \text{ ح } (Y < 1.2)$$

$$(5) \text{ ح } (Y > 2.4)$$

$$(6) \text{ ح } (-2 > Y > 2)$$

الحل: (1) ح  $(1 > 1) = \emptyset - (1) \emptyset - (1) = 8413 - 1587 - 6826$

(2) ح  $(1.35 > 1.35) = \emptyset - (2.1) \emptyset - (1.35) =$

$8936 - 9885 - 9821 =$

(3) ح  $(1.2 > 1.2) = \emptyset - (3) \emptyset - (1.2) =$

$9987 - 8849 - 1138 =$

(4) ح  $(1.2 \times 1.2) = 1 - \text{ح}(1.2 > 1.2) =$

$1 - 8849 - 1151 =$

(5) ح  $(2.49 > 2.49) = 1 - 9936 - 0064 =$

(6) ح  $(2 > 2) = \emptyset - (2) \emptyset - (2) =$

$772 - 90228 - 9544 =$

مثال: اذا علم ان علامات مجموعة من الطلاب في احد الكليات تخضع للتوزيع

المعتاد (62، 49) فاذا اختير شخص ما بطريقة عشوائية ما احتمال انه قد

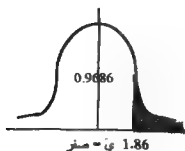
حصل على علامة اكثر من 75.

الحل:  $\mu = 62, \sigma^2 = 49, \sigma = 7, \text{سعر} = 75$

$$\text{ح} \left( \frac{62 - 75}{7} < \frac{13}{7} < \text{ح} \right) = \text{ح} (1.86 < \text{ح})$$

$$= 1 - \text{ح} (1.86 \geq \text{ح}) = 1 - (1.86) \emptyset =$$

$$= 0.0314 = 0.9686 - 1 =$$



مثال: احسب الاحتمالات التالية:

$$(1) \text{ ح } (ي > 2) \quad (2) \text{ ح } (1.4 > ي > 2.89) \quad (3) \text{ ح } (ي > 2.81)$$

$$(4) \text{ ح } (-1.35 > ي > 1.73) \quad (5) \text{ ح } (0 > ي > 0.97)$$

$$(6) \text{ ح } (ي > 2.1) \quad (7) \text{ ح } (ي > 2.85)$$

الحل:

$$(1) \text{ ح } (2 > ي) = 1 - \Phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$(2) \text{ ح } (1.4 > ي > 2.89) = \Phi(2.89) - \Phi(1.4) = 0.9881 - 0.9192 = 0.0789$$

$$(3) \text{ ح } (ي > 2.81) = 1 - \Phi(2.81) = 0.0025$$

$$(4) \text{ ح } (-1.35 > ي > 1.73) = \Phi(1.73) - \Phi(1.35) = 0.9582 - 0.8697 = 0.0885$$

$$(5) \text{ ح } (0 > ي > 1.97) = \Phi(0) - \Phi(1.97) = 0.5 - 0.9798 = 0.0202$$

$$(6) \text{ ح } (ي > 2.1) = 1 - \Phi(2.1) = 1 - 0.9821 = 0.0179$$

$$(7) \text{ ح } (ي < 2.85) = \Phi(2.85) = 0.9977 = 1 - 0.0022$$

مقال: اذا كان عمر احد انواع البطاريات يتبع التوزيع المعتاد بمتوسط 3 سنوات

وانحراف معياري نصف سنة فاذا اختير من هذا الانتاج بطارية واحدة

عشوائية اوجد ح(س > 2.3 سنة)

$$\text{الحل: } \mu = 3, \sigma = \frac{1}{2}, \text{ س } > 2.3$$

$$\text{ح } \left( \frac{7}{5} > ي \right) = \text{ح } \left( \frac{3 - 2.3}{\frac{1}{2}} > ي \right) = \text{ح } \left( \frac{3 - 2.3}{\frac{1}{2}} > ي \right)$$

$$ح(ي > 1.4) = 1 - \Phi(1.4) = 0.0808$$

مثال: اذا علم ان علامات الطلاب في احد الكليات تتبع التوزيع الطبيعي حيث

م (14، 8) والمطلوب حساب

(1) احتمال العثور على شخص له علامة اقل من 72.

(2) احتمال الحصول على علامة اكثر من 80

(3) احتمال ان تكون له علامة تتراوح بين 60 - 70

(4) اذا منح اعلى من 8% من الطلبة على تقدير ممتاز ما هي العلامة التي تخول

الطالب للحصول على هذا التقدير.

(5) اذا اعتبر ما نسبته 12% من الطلبة راسباً ماهي علامة الرسوب.

الحل:  $\mu = 64$ ،  $\sigma = 8$

$$ح(ي > 1.4) = \Phi\left(\frac{64 - 72}{8}\right) = 0.0808 \quad (1)$$

$$ح(ي < 2) = \Phi\left(\frac{64 - 80}{8}\right) = 0.0228 \quad (2)$$

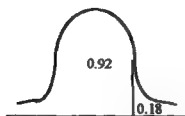
$$1 - 0.99772 = 0.00228$$

$$ح(70 \geq ي \geq 60) = \Phi\left(\frac{64 - 70}{8}\right) - \Phi\left(\frac{64 - 60}{8}\right) = 0.3085 - 0.7734 = 0.4649 \quad (3)$$

$$ح(0.5 \leq ي \leq 0.75) = \Phi\left(\frac{64 - 40}{8}\right) - \Phi\left(\frac{64 - 56}{8}\right) = 0.9772 - 0.9238 = 0.0534$$

$$0.05 \quad 0.75$$

$$0.4649 = 0.3085 - 0.7734$$



$$\frac{64 - \mu}{8} = Z \quad (4)$$

$$\frac{64 - \mu}{8} = \frac{1.405}{1}$$

$$11.240 = 64 - \mu$$

$$11.240 + 64.0 = \mu$$

$$75.240 = \mu$$

$$\frac{64 - \mu}{8} = Z \quad (5)$$

$$\frac{64 - \mu}{8} = \frac{1.175}{1}$$

$$-9.400 = 64 - \mu$$

$$64 + 9.4 = \mu$$

$\mu = 54.6$  علامة الرسوب

مثال: اذا علم ان للمتغير العشوائي  $X$  التوزيع المعتاد متوسطه  $\mu = 50$  ، وتباينه  $\sigma^2 = 100$

المطلوب إيجاد احتمال ان هذا المتغير يقع بين  $45 < X < 62$

الحل: الاحتمال المطلوب  $P\left(\frac{50 - 62}{10} < Z < \frac{50 - 45}{10}\right) = P(-1.2 < Z < 0.5)$

$$= \Phi(0.5) - \Phi(-1.2)$$

$$= 0.5764 = 0.3085 - 0.8849$$

مثال: اذا علم ان احد انواع البطاريات يعمل حتى 3 سنوات بالمتوسط بانحراف

معياري  $\frac{1}{2}$  سنة فعلى اعتبار ان لعمر البطارية توزيع معتاد ماهو احتمال ان

يحصل على بطارية تعمر فترة اقل من 2.3 سنة.

الحل:  $\mu = 3$  سنة ،  $\sigma = 0.5$

$$P(0.7 < Y) = P\left(\frac{3 - 2.3}{0.5} < Z\right) = P(Z > 1.4) = 0.0808$$

$$= 0.0808 = (1.4 - \Phi) = \Phi(1.4) - 0.5$$

مثال: اذا علم ان احد مصانع اللببات يعمر بالمتوسط 800 ساعة وبانحراف معياري 40 ساعة اذا اخذت لمبة عشوائيا من انتاج هذا المصنع ما احتمال ان تحترق بين 834.778 ساعة .

الحل:  $\mu = 800$  ساعة ،  $\sigma = 40$  ساعة

$$P(778 < X < 834) = P\left(\frac{800 - 834}{40} < Z < \frac{800 - 778}{40}\right) = P(-0.85 < Z < 0.55)$$

$$= P\left(\frac{22}{40} < Z < \frac{34}{40}\right) =$$

$$= P(0.55 < Z < 0.85) =$$

$$= \Phi(0.85) - \Phi(0.55) =$$

$$= 0.8023 - 0.2912 = 0.5111$$

مثال: اذا كان متوسط العلامات في امتحان ما هو 74 علامة والانحراف المعياري 7 وبناء على صيغة التعبير عن العلامة المطلقة بالتقدير بالحرف وقرر المدرس ان يعطي تقدير أعلى 12٪ من الطلبة.

المطلوب: على اعتبار ان للعلامات توزيع متعاد حساب اقل علامة توهل الطالب للحصول على هذا التقدير

الحل:  $\mu = 74$  ،  $\sigma = 7$

نحسب أولاً القيمة المعيارية من المعطيات

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = 0.88$$

$$ي = 1.175$$

$$ي_r = \frac{\mu - \sigma}{\sigma}$$

$$\frac{74 - \mu}{7} = \frac{1.175}{1}$$

$$\mu - 74 = 7 \times 1.175 = 8.225$$

$$\mu = 74 + 8.225 = 82.225$$

الخطوات التي اتبعت للحصول على النتيجة اعلاه:

- نرسم المنحنى لتوضيح المساحة الذي يقع ضمنها من سيحصلون على تقدير أ ومن الذين لن يحصلوا على هذا التقدير  $1 - 0.12 = 0.88$
- نبحث من خلال الجدول التوزيع الطبيعي المعياري على القيمة المعيارية المقابلة للمساحة 0.88 فنجد انها تتوسط المساحة

$$0.8800$$

$$0.8790$$

$$0.8810$$

$$1.17$$

$$ي = 1.18$$

القيمة التي تقابل 0.88 هي:

$$1.175 = \frac{1.17 + 1.18}{2}$$

مثال: في تقييم نتائج الامتحان لاحد المسابقات لعدد من الطلبة بلغ 120 طالبا وجد

ان متوسط العلامات 64 والانحراف المعياري 8 فاذا اختير طالب عشوائيا

- (1) ما هو احتمال ان تكون درجته اكبر من 70.
- (2) ما هو احتمال ان تكون درجته بين (55، 80).
- (3) ما هو احتمال ان يكون قد حصل على درجة اقل من 80.



(4) ما هو احتمال ان يكون قد حصل على درجة على الأكثر 75.

(5) اذا حدد ما نسبته 8٪ لمنحهم تقدير ممتاز ماهي ادنى درجة تؤهل الطالب

للحصول على هذا التقدير.

(6) ماهو عدد الطلبة المتوقع لأولئك الحاصلين على علامات اقل من 54.

$$\text{الحل: } \mu = 64, \sigma^2 = 8, \sigma = 2.9$$

$$\alpha = P(Y > 70) = P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} > \frac{70 - 64}{2.9}\right) = P(Z > 2.07) = 1 - P(Z \leq 2.07) = 1 - 0.97734 = 0.02266$$

$$P(3.8 < Y < 5.5) = P\left(\frac{3.8 - 64}{2.9} < \frac{Y - \mu}{\sigma} < \frac{5.5 - 64}{2.9}\right) = P\left(\frac{64 - 80}{2.9} < Z < \frac{64 - 55}{2.9}\right) = P(-5.52 < Z < 3.10) = P(Z < 3.10) - P(Z < -5.52) = 0.9995 - 0.0001 = 0.9994$$

$$0.9772 - 0.0228 = 0.9544$$

$$P(Y > 80) = P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} > \frac{80 - 64}{2.9}\right) = P(Z > 5.52) = 1 - P(Z \leq 5.52) = 1 - 0.9999 = 0.0001$$

$$0.9772 = P(Z \leq 2.07)$$

$$P(Y > 75) = P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} > \frac{75 - 64}{2.9}\right) = P(Z > 3.79) = 1 - P(Z \leq 3.79) = 1 - 0.9998 = 0.0002$$

$$64 + 11.24 = 75.24$$

$$P(Y > 54) = P\left(\frac{Y - \mu}{\sigma} > \frac{54 - 64}{2.9}\right) = P(Z > -3.45) = P(Z < 3.45) = 0.9997$$

$$120 \times 0.0968 = 11.62$$

مثال: اذا علم ان معدلات الكفاءة في احدى الكليات التي عدد طلابها 300 طالب

تتبع توزيعا معنادا بمتوسط 2.1 وانحراف معياري 1.2 كم من هؤلاء الطلبة

يتوقع ان تكون علاماته تتراوح بين 2.5-3.5 اذا علم ان التقريب هو لاقرب

خانة عشرية.

الحل: ن - 300 ،  $\mu = 2.1$  ،  $\sigma = 1.2$

$$C \left( \frac{2.1 - 2.5}{1.2} > Y > \frac{2.1 - 3.5}{1.2} \right) = C \left( \frac{0.4}{1.2} > Y > \frac{1.4}{1.2} \right)$$

$$= C(0.33 > Y > 1.17) =$$

$$= \Phi(1.17) - \Phi(0.33)$$

$$= 0.8790 - 0.6293 =$$

$$= 0.2497$$

$$= 0.2497 \times 300 = \text{عدد الطلاب}$$

$$= 75 \text{ طالب}$$

مسائل التقريب

المطلوب : تقريب الاحتمال باستخدام كل من جدول ذات الحدين واسلوب

التقريب للتوزيع الطبيعي للعبارة ح (س=4 ، 15 ، 0.4)

$$C(س=4 ، 15 ، 0.4) = C(س \geq 4) - C(س \geq 3)$$

مثال: اوجد بطريقة التقريب التوزيع المعتاد. احتمال

$$C(3.5 \leq س \leq 4.5) \text{ حيث } ن = 15 ، ح = 0.4$$

$$\mu = ت(س) = ن \times ح = 15 \times 0.4 = 6.0$$

$$\sigma = \sqrt{ن \times ح(1-ح)} = \sqrt{15 \times 0.4 \times 0.6} = \sqrt{3.6} = 1.9$$

$$C(3.5 < س < 4.5) = C\left(\frac{6-3.5}{1.9} < Y < \frac{6-4.5}{1.9}\right)$$

$$= C(-1.3) - C(-0.9) =$$

$$= \Phi(0.9) - \Phi(1.3) =$$

$$= 0.2148 - 0.0918 = 0.123$$

## أسئلة عامة على المنحنى الطبيعي

س1 اعطيت احدى الشعب امتحانا في الاحصاء من عشر علامات، وكانت النتائج تدرج من الصفر حتى (10) وكان متوسط علامات الطلاب في هذا الامتحان 6.5 والانحراف المعياري 1.5 فاذا افترضنا ان العلامات تتوزع توزيعا طبيعيا فأوجد ما يلي:-

- (1) حدد النسبة المئوية لعدد الطلاب الذين حصلوا على (7) علامات.
- (2) اكر علامة سجلها ال 20٪ من الطلاب ذوي العلامات المتدنية في الفصل.
- (3) اصغر علامة سجلها ال 20٪ من الطلاب ذوي العلامات المرتفعة في الفصل.

س2 اخذت عينة مكونة من 200 انبوب من احدى مصانع الانابيب وكان متوسط قطر الانبوب 10 سم والانحراف المعياري 0.5 سم وكان استخدام هذا الانبوب يسمح بانحراف في القطر يتراوح اقصاه من 9.5 - 10.5 سم وفيما غير ذلك تعتبر الانابيب تالفة. اوجد النسبة المئوية للانابيب التالفة الناتجة في هذا المصنع على افتراض ان اقطار الانابيب تتوزع توزيعا طبيعيا.

س3 متوسط طول 400 شجرة سرو 7م والانحراف المعياري 0.8 م فاذا فرضنا ان الاطوال تتوزع توزيعا طبيعيا فأوجد ما يلي:-

- 1- عدد الاشجار التي اطوالها بين 6-7.5م
- 2- عدد الاشجار التي تزيد اطوالها عن 8م

س4 اذا كان متوسط اعمار البدلات التي تستوردها المؤسسة العسكرية للجنود 36

شهوراً والانحراف المعياري 6 شهور وكان عمر البدلات يأخذ شكل التوزيع الطبيعي فإذا استوردت المؤسسة 5000 بدلة فكم بدلة تحتاج إلى الاستبدال بعد 30 شهراً.

س5 إذا كانت وزارة التعليم العالي تمنح لـ 4% من طلبة كليات المجتمع في الفحص الشامل بعثات دراسية وكانت علامات طلاب الكلية قريبة من توزيع طبيعي وسطه الحسابي 65 وانحرافه المعياري 6 غما هي أقل علامة تحصل على بعثة دراسية.

س6 الأزواج التالية هي قيم معيارية تحصر بينها جزءاً من مساحة المنحنى المطلوب إيجاد المساحة الواقعة خارج كل زوجين.

أ- (1.8، 1.8)      ب- (1.6، 1.6)      ج- (-2.28، 2.28)

س7 جد المساحة المحصورة بين كل زوج من القيم المعيارية التالية:-

أ- (-0.4، 0.4)      ب- (-0.6، 0.6)      ج- (-1.2، 1.2)

س8 جد المساحة الموجودة إلى يمين كل من القيم المعيارية التالية :

أ) 1.3      ب) 1      ج) 1.2      د) 0.8

س9 جد المساحة الموجودة إلى يسار كل من القيم المعيارية التالية :

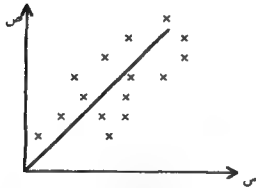
أ) 1.5      ب) 0.8      ج) صفر      د) 0.5

## الفصل السادس

### الارتباط والانحدار

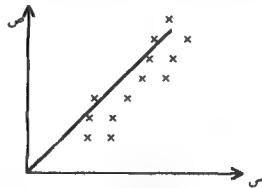
#### (1-6) طريقة جداول الانتشار

- حتى نستطيع ان نتعرف على مفهوم الارتباط من خلال جداول الانتشار لابد من التعرف اولا على كيفية تكون جدول الانتشار ويتم من خلال الخطوات التالية.
- نرسم احدائين الافقي والرأسي حيث يمثل على المحور الافقي الظاهرة س وعلى المحور الرأسي الظاهرة ص.
  - نعين النقاط التي يمثل فيها الاحداثي السيني قيمة من قيم المتغير س والاحداثي الصادي قيمة من قيم المتغير ص.
  - نحاول تحرير منحنى من اغلب النقاط بحيث يتوسط القيم ونلاحظ بعد توزيع النقاط الاشكال الانتشارية التالية:



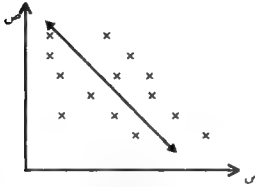
شكل (2-6)

نلاحظ تباعد المشاهدات عن الخط المستقيم مما يدل على أن العلاقة خطية طردية (موجبة) ولكنها ضعيفة



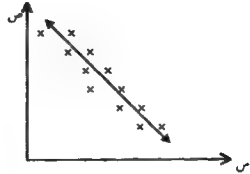
شكل (1-6)

نلاحظ تكثف المشاهدات حول الخط المستقيم مما يشير الى أن العلاقة خطية والارتباط ايجابي (طردي) قوي



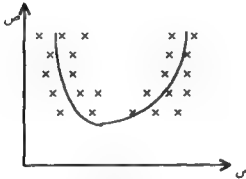
شكل (4-6)

نلاحظ تباعد المشاهدات عن الخط المستقيم مما يدل على أن العلاقة عكسية (سلبية) والعلاقة ضعيفة



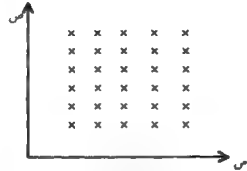
شكل (3-6)

نلاحظ تكثف النقاط حول الخط المستقيم مما يشير إلى أن العلاقة عكسية (سلبية) والعلاقة قوية



شكل (6-6)

أما إذا اتخذ الشكل الانتشاري الشكل أعلاه فلننا نقول أن العلاقة ليست خطية وإنما من الدرجة الثانية



شكل (5-6)

لما إذا اتخذ الشكل الانتشاري الشكل أعلاه نقول أنه لا يوجد علاقة بين المتغيرين من، من

## 6-2 معامل الارتباط وخصائصه

كما اسلفنا بأنه يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغيرين بمقياس هو معامل الارتباط والذي سنرمز له بالرمز  $r$  وهذا سيعتخذ قيمة عددية تتراوح بين  $-1 \leq r \leq 1$  وإذا وجد قيمة أكبر أو أصغر من هذه الحدود دلالة على أن هناك خطأ حسابي قد تم، وللمعامل دلالات تواردها في ما يلي لتفسير العلاقة بين المتغيرين.

1) إذا كانت  $r = -1$  فإن العلاقة بين المتغيرين تكون عكسية تامة.

(2) إذا كانت  $-1 < r < 0$  فإن العلاقة تكون علاقة عكسية.

(3) إذا كانت  $r = 0$  صفر. فهذا يعني أنه لا وجود لأي علاقة بين المتغيرين.

(4) إذا كانت  $0 < r < 1$  فهذا يعني أنه يوجد علاقة إيجابية تقوى كلما اقتربنا من الواحد صحيح.

(5) عندما تكون  $r = 1$  فإن العلاقة تكون علاقة تامة.

### 6-3) طرق إيجاد معامل الارتباط:

نجد معامل الارتباط بطريقة بيرسون

أ- الطريقة المبسطة:

لايجاد معامل الارتباط نتبع الخطوات التالية:

- نجد  $\sum x$ ،  $\sum y$

- نجد  $\sum x^2$  أي مربع كل مشاهدة من  $x$  ثم المجموع.

- نجد  $\sum y^2$  أي مربع كل مشاهدة في  $y$

- نجد معامل الارتباط من العلاقة

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \times \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sqrt{\left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n} \right) \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n} \right)}}$$

.....(6-1)

ونورد الامثلة التالية:

مثال: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية للمتغيرين س، ص

المجموع						
س	1	2	3	4	5	15
ص	3	6	9	12	15	45

جدول (6-1)

المطلوب: إيجاد معامل الارتباط

الحل: نشكل الجدول التالي والذي يحوي جميع الحسابات المطلوبة للحل.

الرقم	س	ص	س ص	س <sup>2</sup>	ص <sup>2</sup>
1	1	3	3	1	9
2	2	6	12	4	36
3	3		27	9	81
4	4	12	48	16	144
5	5	15	75	25	225
المجموع	15	45	165	55	495

جدول (6-2)

من البيانات اعلاه نجد قيمة ر

$$r = \frac{45 \times 15}{5} - 165 = \frac{135 - 165}{(405 - 495)(45 - 55)} = \frac{-30}{(-90)(-40)} = \frac{-30}{3600} = -\frac{1}{120}$$

ر=1 أي ان الارتباط ارتباط ايجابي تام



مثال : البيانات التالية تمثل قيم س، ص مرتبة في الجدول (3-6)

المجموع						
26	7	5	4	7	3	س
30	8	6	8	6	2	ص

جدول (3-6)

المطلوب إيجاد معامل الارتباط لهذه البيانات

الحل : نكون الجدول (4-6) والمحتوي على البيانات المطلوبة لحل السؤال

الرقم	س	ص	س ص	س <sup>2</sup>	ص <sup>2</sup>
1	3	2	6	9	4
2	7	6	42	49	36
3	4	8	32	16	64
4	5	6	30	25	36
5	7	8	56	49	64
المجموع	26	30	166	148	204

جدول (4-6)

من البيانات اعلاه نجد قيمة ر من العلاقة

$$r = \frac{\frac{30 \times 26}{5} - 166}{\sqrt{\left(\frac{30 \times 30}{5} - 204\right)\left(\frac{26 \times 26}{5} - 148\right)}} = \frac{156 - 166}{\sqrt{(180 - 204)(135.2 - 148)}} = \frac{-10}{\sqrt{307.2 \times 12.8}} = \frac{-10}{17.53} = -0.57$$

أي ان الارتباط بين المتغيرين س، ص ايجابي (طردي) متوسط

مثال: البيانات التالية تمثل قيم المتغيرين س ، ص كما في الجدول (5-6) .

س	4	7	9	12	15	47	المجموع
ص	11	9	5	4	2	31	

جدول (5-6)

المطلوب إيجاد معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص

الحل: نشكل الجدول (6-6) والمحتوي على جميع البيانات المطلوبة للحل

الرقم	س	ص	س ص	س <sup>2</sup>	ص <sup>2</sup>
1	4	11	44	16	121
2	7	9	63	49	81
3	9	5	45	81	25
4	12	4	48	144	16
5	15	2	30	225	4
المجموع	47	31	230	515	247

جدول (6-6)

من البيانات اعلاه نطبق العلاقة

$$r = \frac{\frac{31 \times 47}{5} - 230}{\sqrt{\left(\frac{31 \times 31}{5} - 247\right)\left(\frac{47 \times 47}{5} - 515\right)}} = \frac{291.4 - 230}{\sqrt{(192.2 - 247)(441.8 - 515)}} = \frac{61.4 -}{\sqrt{4011.36}} - \frac{61.4 -}{\sqrt{54.8 \times 73.2}} = \frac{61.4 -}{63.34} = 0.97 = \text{وهذا ارتباط سلبي قوي}$$

### 6-3-2) ايجاد معامل الارتباط بطريقة الانحراف المعياري

لذا تتبع الخطوات التالية

$$- \text{نجد } \sum (\text{ص} - \bar{\text{ص}})(\text{ع} - \bar{\text{ع}})$$

- نجد ع س ثم ع ص او قد تكون في بعض الاسئلة معطاة

- نجد معامل الارتباط من العلاقة التالية.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (\text{ص} - \bar{\text{ص}})(\text{ع} - \bar{\text{ع}})}{n \cdot \text{ع} \cdot \text{ص}} \quad (2-6) \dots\dots\dots$$

مثال: من البيانات المعطاة ادناه اوجد معامل الارتباط اذا كان:

$$\sum_{i=1}^n (\text{ص} - \bar{\text{ص}})(\text{ع} - \bar{\text{ع}}) = 47, \text{ع} = 16, \text{ع} = 5 \text{ حيث } n = 5.$$

$$\text{الحل: نطبق العلاقة } r = \frac{47}{5 \times 16} \cdot \frac{1}{5} = \frac{47}{400}$$

∴  $r = 0.12$  وهذا ارتباط ايجابي ضعيف.

### 6-3-3) معامل ارتباط سبيرمان للترتيب

كثيرا ما يستعمل هذا المعامل في البيانات الوصفية التي يستحيل عندها استخدام البيانات العددية بطريقة بيرسون وكذلك ايضا يستخدم في البيانات الرقمية لتسهيل العمليات الحسابية. لذا نلجأ لتحويل البيانات الوصفية الى عددية قابلة للحل.

ولاستخدام هذه الطريقة تتبع الخطوات التالية.

- نجد تراتيب البيانات المعطاة سواء كانت وصفية او رقمية لكل من المتغيرين س، ص ونرمز لهما بالرموز  $\text{س}^*$  ،  $\text{ص}^*$  .

- نجد  $\text{ف} = \text{س}^* - \text{ص}^*$  . أي نجد الفرق بين التراتيب المناظرة.

- نأخذ مربع ف

- نطبق العلاقة التالية

$$r = \frac{\sum f^2}{n^2} - 1 = \frac{6}{(1-2)^2} - 1$$

مثال : البيانات التالية تعطي تقادير عشرة موظفين في احدى الشركات وكانت مرتبة

كما في الجدول (6-7)

س(الأول)	جيد	جيد جدا	مقبول	جيد جدا	جيد	ممتاز	ممتاز	ضعيف	مقبول	جيد جدا
ص(الثاني)	مقبول	ممتاز	ضعيف	ممتاز	جيد جدا	جيد جدا	جيد جدا	مقبول	جيد	جيد

جدول (6-7)

الحل: نشكل الجدول (6-8) يشمل جميع البيانات المطلوبة للحل.

الرقم	س	ص	س	ص	ف <sup>2</sup>
1	جيد	مقبول	6.5	8.5	4.00
2	جيد جدا	ممتاز	4	1.5	6.25
3	مقبول	ضعيف	8.5	10	2.25
4	جيد جدا	ممتاز	4	1.5	6.25
5	جيد	جيد جدا	6.5	3.5	9.00
6	ممتاز	جيد جدا	1.5	3.5	4.00
7	ممتاز	جيد	1.5	6	20.25
8	ضعيف	مقبول	10	8.5	2.25
9	مقبول	جيد	8.5	6	2.25
10	جيد جدا	جيد	4	6	4.00
المجموع					60.50

جدول (6-8)

- ترتيب التقادير اعلاه كما ورد في س، ص
- نجد ف = س - ص
- نربع ف
- نجد مجموع الترابيع أي نجد ف<sup>2</sup>.
- ثم نطبق العلاقة

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n f_i^2}{n} - 1 = \frac{60.5 \times 6}{(1-100)10} - 1 = 0.37$$

$$0.63 = 0.37 - 1 = \frac{363}{990} - 1 =$$

وهذا يدل على ان الارتباط جيد

ملاحظات على الحل.

- عندما كان لدينا قيم متكررة كنا نأخذ ترتيب كل قيمة متكررة التصاعدي ثم نجمع هذه التراتيب ونأخذ متوسطها الساي فيكون هو ترتيب كل قيمة في س. فمثلاً عند ترتيب قيم س لاحظنا ان التقدير ممتاز تكرر مرتين كان ترتيبهما التصاعدي 1، 2 فيكون الترتيب لكل تقدير هو  $1.5 = \frac{2+1}{2}$  فيوضع في عمود س 1.5 اما التقادير ممتاز وهكذا نضع قيم س وص لباقي التقادير.

مثال: البيانات التالية تمثل درجات 10 طلاب في مبحثي الاحصاء والرياضيات وهي

كما في الجدول (6-9)

87	75	60	90	88	80	95	90	75	85	درجة الاحصاء س
83	70	65	85	72	80	75	75	85	80	درجة الرياضيات ص

جدول (6-9)

اوجد معامل ارتباط سبيرمان

الحل: نكون الجدول (6-10) والذي يحتوي على جميع البيانات المطلوبة

درجة الاحصاء س	درجة الرياضيات ص	رتبة س ص	رتبة ص ص	ف=ص-ص	ف <sup>2</sup>
85	80	6	5.5	0.5	0.25
75	85	8.5	2	6.5	42.25
90	85	2.5	2	0.5	0.25
95	75	1	7	6.0-	36.00
80	80	7	5.5	1.5	2.25
88	72	4	8	4-	16.00
0	85	2.5	2	0.5	0.25
60	65	10	10	صفر	صفر
75	70	8.5	9	0.5-	0.25
87	83	5	4	1	1.0
					998.5

جدول (6-4)

بعد إيجاد هذه البيانات نطبق التالية.

- ثم نطبق العلاقة

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n f_i^2}{(1^2 n)} - 1$$

$$0.4 = 0.6 - 1 = \frac{591}{990} - 1 = \frac{98.5 \times 6}{(1 - 100)10} - 1 =$$

∴ الارتباط ضعيف بين المتغيرين س، ص وهذه الطريقة تسمى طريقة سبيرمان للترتيب.

## الانحدار

### (4-6) مفهوم الانحدار:

هو إيجاد معادلة رياضية تعبر عن العلاقة بين المتغيرين س، ص تستعمل للتنبؤ عن قيم سابقة وقيم مستقبلية ل ص. او س حسب المعلوم منهما وتكون هذه المعادلة الرياضية خطية بصورتين.

2-7 أ. اذا كان الانحدار من ص على س فان المعادلة هي

(4-6).....

$$\text{ص} = \text{أس} + \text{ب}$$

المطلوب هو التعرف على قيم أ، ب لصياغة المعادلة ونسمي أ: هو معامل الانحدار او ميل خط الانحدار، وهو قيمة تقديرية ث- هو نقطة تقاطع الانحدار مع المحور الرأسى ويمكن إيجاد قيم أ، ب من العلاقة.

(5-6).....

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n \text{ص}_i \cdot \text{س}_i - \frac{\sum_{i=1}^n \text{ص}_i \cdot \sum_{i=1}^n \text{س}_i}{n}}{\sum_{i=1}^n \text{س}_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n \text{س}_i)^2}{n}}$$

ولإيجاد ب نجد ها من العلاقة

$$\text{ب} = \text{ص} - \text{أص}$$

حيث س، ص هو المتوسط الحسابي للظاهرة س، الظاهرة ص.

ب- ولإيجاد معادلة انحدار س على ص فاننا نكون المعادلة التالية :

(6-6).....

$$\text{س} = \text{أص} + \text{ب}$$

ولاحظا قيم أ، ب من العلاقة من ن العلاقة

(7-6).....

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^2}{n}\right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{(\sum_{i=1}^n y_i)^2}{n}\right)}} = r$$

(8-6).....

ولايجاد  $r = \frac{b}{a}$  -  $b = r \cdot a$

3-7 ولايجاد العلاقة الرياضية بين معاملي الانحدار ومعامل الارتباط فاننا نجد كما يلي:

(9-6).....

$$r = \frac{a \times b}{\sqrt{a^2 \times b^2}}$$

ولتوضيح المفاهيم السابقة نورد الامثلة التالية:

مثال: البيانات التالية تمثل اجور ونفقات خمسة عمال من عمال شركة ما مرتبة في

الجدول (11-6)

25	20	18	15	20	اجور اسبوعية س
20	15	18	14	15	نفقات اسبوعية ص

جدول (11-6)

والمطلوب ايجاد .

أ- معامل ارتباط بيرسون

ب- معادلة انحدار ص/س أي انحدار ص على س باستخدام القانون العام والمربعات .

ج- معادلة انحدار س/ص نجد ص على ص.

د - معامل الارتباط من معامل انحدار ص على س ، س على ص ثم قارن نتيجة د مع

نتيجة أ



هـ) اوجد معادلة انحدار ص على س من الدرجة الثانية  
و) اوجد نفقات عامل ما اذا كان مرتبة 40 دينار.

الحل: نكون الجدول (6-12) الذي يشمل جميع البيانات المطلوبة للحل

س <sup>4</sup>	س <sup>3</sup>	س <sup>2</sup> ص	ص <sup>2</sup>	س <sup>2</sup>	س ص	نفقات المبوية ص	احور اسبوعية
160000	8000	6000	225	400	300	15	20
50625	3375	3150	16	225	210	14	15
104976	5832	5832	324	324	324	18	18
16000	8000	6000	225	400	300	15	20
30625	15625	12500	400	625	500	20	25
866226	40832	33482	1370	1974	1634	82	98
							المجموع

جدول (6-12)

أ- نجد معامل ارتباط بيرسون من العلاقة

$$\begin{aligned}
 & \frac{82 \times 98}{5} - 1634 \\
 & \frac{\sqrt{(1344.8 - 1370)(1920.8 - 1974)}}{\sqrt{\left(\frac{82 \times 82}{5} - 1370\right)\left(\frac{98 \times 98}{5} - 1974\right)}} = r \\
 & \frac{1607.2 - 1634}{\sqrt{(1344.8 - 1370)(1920.8 - 1974)}} = r \\
 & \frac{26.8}{36.61} = \frac{26.8}{\sqrt{1340.64}} = \frac{26.8}{\sqrt{252 \times 53.2}} = r
 \end{aligned}$$

- 0.73 وهذا معامل ارتباط قوي نوعا ما.

ب- ولايجاد معادلة انحدار ص على س نجد

$$\frac{\frac{98 \times 98}{5} - 1634}{\frac{98 \times 98}{5} - 1974} = r$$

$$0.5 = \frac{26.8}{53.2} = \frac{1607 - 1634}{1920.8 - 1974} =$$

$$0.5 = r \therefore$$

ولايجاد ب نجد

$$\bar{ص} = 19.6 , \bar{س} = 16.4$$

نجد قيمة س من العلاقة

$$ب = ص - أ$$

$$6.6 = - 16.4 - 9.80 = 16.4 - 19.6 \times 0.5 =$$

$\therefore$  معادلة انحدار ص/س

$$ص = 0.5 س + (-6.6) = 0.5 س - 6.6$$

ج- ولايجاد معادلة انحدار س على ص نجد اولاً

$$1.06 = \frac{26.8}{25.2} = \frac{1607.2 - 1634}{1344.8 - 1370} = \frac{\frac{82 \times 82}{5} - 1634}{\frac{82 \times 82}{5} - 1370} = r$$

$$\therefore 1.06 = r$$

$$ب = ص - أ$$

$$.4.38 = 20.78 - 16.40 = 19.6 \times 1.06 - 16.4 =$$

∴ المعادلة المطلوبة تكون

$$س = 1.06ص + (-4.38)$$

$$س = 1.06ص - 4.38$$

د- نجد معامل الارتباط من العلاقة

$$س^2 = أ^2 \times ر^2 \text{ واصبح لدينا معلوماً كل من أ، أ'}$$

$$ر^2 = 1.06 \times 0.5$$

$$\text{فيكون معامل الارتباط } ر = \sqrt{0.53}$$

$$ر = 0.73$$

نلاحظ ان الجواب الذي حصلنا عليه بطريقة بيرسون هو نفس الجواب الذي حصلنا عليه بهذه الطريقة.

و) نستطيع التبؤ عن الجواب من العلاقة

$$ص = 0.5س - 6.6 \text{ ونعوض عن س بالقيم المعطاة}$$

$$ص = 0.5س - 6.6 = 20 - 6.6 = 13.4 \text{ دينار وهو المطلوب}$$

هل الجزء الثاني الثاني من ب

**ايجاد معادلة انحدار ص على س باستخدام المربعات الصغرى**

الصورة العامة لمعادلة انحدار ص على س  $ص = م س + هـ$

$$\sum ص = م \sum س + n هـ \quad \text{بأخذ المجموع لجميع الأطراف}$$

$$98 = 82 م + 5 هـ$$

س ص = م س<sup>2</sup> + و س      نضرب جميع أطراف المعادلة الأصلية في س

$$\sum س ص = م \sum س^2 + و \sum س$$

$$1634 - 1974م + 98ج$$

$$98 - 82م + 5ج$$

$$9870 - 8170م + 490ج$$

$$\pm 8036 - 9604م \pm 490ج \quad \text{بالطرح}$$

$$134 - 266م$$

$$م = \frac{134}{266} = 0.5$$

وبالتعويض عن م في أي من المعادلات ولتكن معادلة (1)

$$82 - 5 + 0.5 \times 5 = 5ج$$

$$82 - 49 = 5ج$$

$$33 = 5ج - \frac{33}{5} = 6.6$$

∴ معادلة المنحدار ص على س هي

$$ص = 0.5س + 6.6$$

(هـ) اما لايجاد معادلة خط المنحدار ص على س من الدرجة الثانية

نضع المعادلة الأصلية      ص = أس<sup>2</sup> + ب س + ج ثم يأخذ المجموع لجميع الاطراف

$$\sum ص = أ \sum س^2 + ب \sum س + ج \sum 1 \dots\dots\dots (1) \quad \text{ثم بضرب المعادلة الاصلية في س وأخذ المجموع}$$

$$\sum س ص = أ \sum س^3 + ب \sum س^2 + ج \sum س$$

1634 = 40832 + 1974ب + 98ج.... (2) ثم بضرب المعادلة الاصلية في س<sup>2</sup> والمجموع

$$\sum س^2 ص - أ \sum س^4 ب + \sum س^3 ج - س^2$$

$$33482 = 86622ب + \sum س^3 ج - س^3.... (3)$$

وبحل المعادلات اعلاه ينتج قيم أ، ب، ج وتعويضها في المعادلة الاصلية.

## 5-6 أمثلة اضافية

مثال: الجدول (6-13) يمثل معدل درجات خمسة طلاب في المرحلة الثانوية

ومعدلاتهم في السنة الاولى في الكلية

65	82	64	72	85	معدل الثانوية س
67	71	73	81	91	معدل الثانوية ص

جدول (6-13)

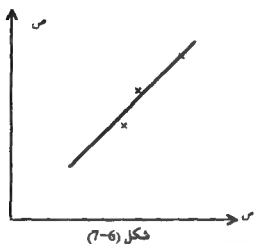
والمطلوب

- 1- يرسم لوحة الانتشار للمتغيرين س، ص
  - 2- ايجاد معامل الارتباط بطريقتين
  - 3- اختبار هـ: أ= صفر على مستوي الدلالة  $\alpha = 0.5$  مقابل هـ: أ≠ صفر
  - 4- اوجد معادلة خط انحدار ص على س كذلك معادلة انحدار س على ص.
  - 5- اوجد معامل الارتباط من العلاقة التي تربط الارتباط بالانحدار.
  - 6- قدر معدل احد الطلاب في الثانوية العامة اذا كان معدله في السنة الاولى 88.
  - 7- قدر معدل طالب في السنة الاولى اذا كان معدله في الثانوية العامة 76.
- الحل: نكون جدول الحل (6-14).

س	ص	س <sup>2</sup>	ص <sup>2</sup>	س <sup>2</sup>	رتبة س	رتبة ص	ف	ف <sup>2</sup>
85	91	7225	8281	1	1	0	0	72
72	81	5184	6561	3	2	1	1	$73.6 = \frac{368}{5} = \bar{ص}$
64	73	4096	532	5	3	2	4	$76.6 = \frac{383}{5} = \bar{س}$
82	71	5822	5041	2	4	2-	4	
65	67	4355	4489	4	5	1-	1	
368	383	28416	2701				8	

جدول (6-14)

(1) نبدأ برسم لوحة الانتشار



والخط المبين يمر بأغلب النقاط

(2)أ- معامل ارتباط بيرسون نجده من العلاقة التالية

$$r = \frac{\sum_{j=1}^n \bar{ص}_j \bar{س}_j - \frac{\sum_{j=1}^n \bar{ص}_j \cdot \sum_{j=1}^n \bar{س}_j}{n}}{\sqrt{\left( \sum_{j=1}^n \bar{ص}_j^2 - \frac{(\sum_{j=1}^n \bar{ص}_j)^2}{n} \right) \left( \sum_{j=1}^n \bar{س}_j^2 - \frac{(\sum_{j=1}^n \bar{س}_j)^2}{n} \right)}}$$

$$\frac{28188.8 - 28416}{\sqrt{(29337.8 - (27084.8 - 27454))}} = \frac{\frac{383 \times 368}{5} - 28416}{\sqrt{\left(\left(\frac{383 \times 383}{5} - 29701\right)\left(\frac{368 \times 368}{5} - 27454\right)\right)}} =$$

$$0.62 = \frac{227.2}{366.1} = \frac{227.2}{\sqrt{363.2 \times 369.2}} =$$

ب- نجد معامل ارتباط سيرمان كطريقة أخرى.

$$0.6 = 0.4 - 1 = \frac{48}{120} = \frac{8 \times 6}{24 \times 5} - 1 = \frac{\sum_{j=1}^n 6}{\sum_{j=1}^n 1} - 1 = r$$

(4) ان معادلة خط انحدار ص على س هي

ص = أس + ب.

واذا تم تحديد كل من أ، ب يتم إيجاد المعادلة المطلوبة . ولتيم ذلك نجد أ من العلاقة

$$0.62 = \frac{227.2}{369.2} = \frac{\sum_{j=1}^n \text{ص} - \frac{\sum_{j=1}^n \text{ص} \cdot \sum_{j=1}^n \text{س}}{n}}{\sqrt{\left(\frac{\left(\sum_{j=1}^n \text{س}\right)^2}{n} - \sum_{j=1}^n \text{س}^2\right) \left(\sum_{j=1}^n \text{ص}^2 - \frac{\left(\sum_{j=1}^n \text{ص}\right)^2}{n}\right)}}$$

نجد ب من العلاقة ب = ص - أ س =

$$31 - 45.6 - 76.6 - 73.6 \times 0.62 - 76.6 =$$

المعادلة المطلوبة هي ص = 0.62س + 31

س- أص + ب وبايجاد الثوابت أ، ب نصل الى المعادلة المطلوبة نجد أ من العلاقة التالية

$$0.63 = \frac{227.2}{363.3} = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij}}{n} = \frac{\left( \frac{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n x_{ij} \right)}{n} \right)^2 + \sum_{j=1}^n \left( \frac{\sum_{i=1}^n x_{ij}}{n} \right)^2}{n} = 1$$

نجد من العلاقة ب' = س - أ' س = 73.6 - 76.6 × 0.63 = 25.3

ونكون المعادلة المطلوبة س = 0.63 ص + 25.3

(5) لإيجاد معامل الارتباط من العلاقة

$$r = \sqrt{1 - \frac{0.63 \times 0.62}{0.621}} = 0.621$$

$$(6) \text{ س} = 25.3 + 88 \times 0.63 = 80.74$$

$$(7) \text{ ص} = 31 + 76 \times 0.62 = 78.12$$

## 6-6 معامل الاقتران

تعريف: هو معامل يقيس مدى قوة العلاقة بين ظاهرتين لها اوضاع مختلفة لا تتعدى حالتين وتكون الصورة العامة لها على النحو كما في جدول (6-15).

II	I	الظاهرة الثانية
		الظاهرة الاولى
س <sub>21</sub>	س <sub>11</sub>	أ
س <sub>22</sub>	س <sub>12</sub>	ب

جدول (6-15)



أو في جدول (6-16)

الظاهرة الثانية	1	2
الظاهرة الاولى	I	أ
II	ب	د

جدول (6-16)

.....(6-10)

$$\text{ويكون معامل الارتقان} = \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11} + a_{22}} = \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11} + a_{22}}$$

مثال: البيانات التالية تمثل وضع الانتاجية وعلاقتها مع وجود الحوافز في مؤسسة

صناعية معينة مبينة بالجدول (6-17)

وضع الانتاجية	وجود الحوافز	موجود	غير موجود
تحسنت	16	9	
لم تتحسن	2	10	

جدول (6-17)

المطلوب: ايجاد معامل الارتقان بين المتغيرين وجود الحوافز ووضع الانتاجية

$$\text{معامل الارتقان} = \frac{9 \times 2 - 10 \times 16}{9 \times 2 + 10 \times 16} = \frac{18 - 160}{18 + 160} = \frac{142}{178} = 0.978$$

وهذا يؤكد وجود ارتباط قوي بين ظاهرة الحوافز والانتاجية

## (7-6) معامل التوافق

تعريف: هو معامل يقيس مدى قوة العلاقة بين ظاهرتين مختلفتين بحالات مختلفة تزيد عن اثنتين

ويمكن إيجاده من العلاقة التالية

$$\text{معامل التوافق} = \frac{\sum X^2}{n + \sum X^2} \quad (11-6)$$

نجد أولا  $\sum X^2$  وهنا ن تشير الى العدد الكلي لافراد الظاهرة قيد الدراسة

مثال: البيانات التالية تمثل توزيع الذكور والاناث على ثلاث كليات في جامعة ما مبينة بالجدول (6-18).

الكليات	صنف الطلاب	ذكور	اناث	المجموع
كلية العلوم الانسانية	1059	446	1505	
	908	597		
كلية العلوم الطبيعية	283	119	402	
	179	223		
كلية العلوم التطبيقية	860	361	1221	
	1115	106		
المجموع	2202	926	3128	

جدول (6-18)

القيمة المتوقعة

$$446 = \frac{1505 \times 926}{3128} = 21'$$

$$1059 = \frac{1505 \times 2202}{3128} = 11'$$

$$119 = \frac{402 \times 2202}{3128} = 22'$$

$$283 = \frac{402 \times 2202}{3128} = 12'$$

$$\frac{1221 \times 926}{3128} = 23'$$

$$860 = \frac{1221 \times 2202}{3128} = 13'$$

$$\frac{2(361-106)}{361} + \frac{2(860-1115)}{860} + \frac{2(119-223)}{119} + \frac{2(283-179)}{283} + \frac{2(446-597)}{446} + \frac{2(1059-908)}{1059} = 2X$$

$$457.4991 =$$

$$0.3572 = \frac{457.499}{3138 + 457.4991} \sqrt{-} \text{معامل التوافق}$$

أي ان الارتباط بين ظاهرة اختيار الكلية وظاهرة الجنس من حيث الذكور والاناث هو ارتباط ضعيف.

مثال: البيانات التالية تمثل توزيع 270 مفردة بين الالوان والجنس مبينة بالجدول (6-19)

الجنس \ الالوان	ذكر		انثى		المجموع
	بني	وردي	أزرق	المجموع	
بني	80	30	40	120	120
وردي	30	40	50	120	80
أزرق	40	30	30	100	70
المجموع	150	100	120	270	270

جدول (6-19)

المطلوب: (1) ماهو نوع المتغيرين قيد الدراسة.

(2) حساب معامل التوافق بين اللون والجنس.

الحل: تكون جدول الحل

(1) نوع المتغير قيد الدراسة هي متغيرات تدل على الصفات (متغيرات وصفية)

$$\sqrt{\frac{^2X}{n+^2X}} \quad (2)$$

$$67 = \frac{120 \times 150}{270} = \text{مق 11}$$

$$53 = \frac{120 \times 120}{270} = \text{مق 21}$$

$$44 = \frac{80 \times 150}{270} = \text{مق 12}$$

$$36 = \frac{80 \times 120}{270} = \text{مق 22}$$

$$39 = \frac{70 \times 120}{270} = \text{مق 13}$$

$$31 = \frac{70 \times 150}{270} = \text{مق 23}$$

$$\frac{^2(36-50)}{36} + \frac{^2(44-30)}{44} + \frac{^2(53-40)}{53} + \frac{^2(67-80)}{67} + \frac{^2(31-30)}{30} + \frac{^2(39-40)}{39} = ^2X$$

$$15.666 - 0.033 + 0.025 + 5.444 + 4.454 + 3.188 + 2.522$$

$$0.234 = \sqrt{\frac{15.666}{285.666}} = \sqrt{\frac{15.666}{270 + 15.666}} = \text{معامل التوافق}$$

وهذا يعني ان الارتباط ضعيف.

## تمارين عامة على الفصل السادس

1- البيانات التالية تمثل ارقام المشاهدات س، ص كما في الجدول التالي

س	2	5	7	10	12	13	15
ص	4	10	14	20	24	26	30

والمطلوب ايجاد نوع الارتباط بين المتغيرين مع ذكر نوعه ووصفه.

2- اوجد معامل ارتباط بيرسون لقيم المشاهدات المبوبة في الجدول التالي.

س	14	8	10	12	14	16
ص	12	8	7	5	3	1

3- من البيانات المرتبة بالجدول.

س	2	6	8	10	12	14
ص	1	2	3	4	5	6

والمطلوب (1) ايجاد معامل ارتباط بيرسون

(2) ايجاد معامل ارتباط سبيرمان للرتب.

4- من البيانات المعطاة

$$\sum_{ص=85}^{س=200} س=20، \sum_{ص=30}^{س=5} س=165، \sum_{ص=200}^{س=2} س=2$$

اوجد معامل الارتباط للمتغيرين بطريقة بيرسون.

5- من البيانات التالية اوجد معامل ارتباط سبيرمان للرتب اذا كانت مبينة كما يلي.

$$\sum_{ن=6}^{ف=55.5} ف=55.5، ن=6$$

س6: في مايلي علامات مجموعة مؤلفة من 5 طلاب في امتحاني الرياضيات والاحصاء س، ص على التوالي.

س	86	68	74	80	62
ص	80	65	75	75	65

المطلوب

- 1) حساب معامل ارتباط بيرسون (2) معامل ارتباط سبيرمان.
- 3) معادلة الانحدار  $V = A + B \cdot S$  (4) اذا علم ان احد الطلبة قد حصل علامة (78) في الرياضيات اوجد علامة الطالب في الاحصاء.
- 5) ايجاد قيمة الرياضيات اذا كانت علامته في الاحصاء هي 60.
- 6) لرسم شكل الانتشار بناءً على المشاهدات
- 7) لرسم خط الانحدار
- 8) تفسير معاملي أ، ب.

# 7

## الانحدار والارتباط

### 6-1 نموذج الانحدار الخطي Linear Regression Model

النص الرياضي للمسألة:

اكتب برنامجاً لحساب ما يأتي:

- 1- مقدرات المربعات الصغرى least squares estimators (b, a) لمعاملات المجتمع  $\alpha$ ,  $\beta$  كما معطاة بالصيغ الرياضية التالية:

$$b = \frac{N \sum XY - \sum X \sum Y}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$a = \bar{Y} - b\bar{X}$$

- 2- الخطأ المعياري للتقدير (S) كما هو معطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$S = \sqrt{\frac{N-1}{N-2} (S_y^2 - b^2 S_x^2)}$$

$$S_x^2 = \frac{N \sum X^2 - (\sum X)^2}{N(N-1)} \quad \text{حيث}$$

$$S_y^2 = \frac{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2}{N(N-1)} \quad \text{و}$$

3- فترة الثقة للمعامل في نموذج الانحدار الخطي  $\mu_{yx} = \alpha + \beta X$  بموجب الصيغة الرياضية التالية:

$$a - \frac{t_{\alpha/2} S \sqrt{\sum X_i^2}}{S_x \sqrt{N(N-1)}} < \alpha < a + \frac{t_{\alpha/2} S \sqrt{\sum X_i^2}}{S_x \sqrt{N(N-1)}}$$

حيث  $t_{\alpha/2}$  هي قيمة دالة الاختبار (t) بدرجات حرية مقدارها  $u = N - 2$  ،  $\sum X_i^2$  هو مجموع مربعات نقاط البيانات  $X$ ، و  $S$  هو التقدير غير المنحاز unbiased estimator لـ  $(\sigma)$  وكما هو معطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$S^2 = \frac{N-1}{N-2} (S_y^2 - bS_x^2)$$

حيث  $N$  هو عدد ازواج نقاط البيانات في العينة.

4- فترة الثقة للمعامل في نموذج الانحدار الخطي  $\mu_{yx} = \alpha + \beta x$  وهو كما معطى بالصيغة الرياضية التالية:

$$b - \frac{t_{\alpha/2} \cdot S}{S_x \sqrt{N-1}} < \beta < b + \frac{t_{\alpha/2} \cdot S}{S_x \sqrt{N-1}}$$

حيث  $b$  هو تقدير النقطة point estimator لـ  $(\beta)$  ، و  $(t_{\alpha/2})$  هو قيمة دالة



الاختبار  $t$  بدرجات حرية مقدارها  $v = N - 2$ ، و  $S_x$  هو الانحراف المعياري لنقاط البيانات  $X$ .

### خوارزمية الحل:

- 1- عين عدد  $(N)$  ازواج نقاط البيانات  $(Y, X)$  وتلك من ان عدد الأزواج اكبر من 1.
- 2- احسب حاصل جمع القيم  $X(X1)$  وحاصل جمع القيم  $Y(Y1)$ ، وحاصل جمع مربعات القيم  $X(X2)$  وحاصل جمع مربعات القيم  $Y(Y2)$ ، وحاصل الضرب التقاطعي cross product  $(P)$  لقيم  $X$  و  $Y$ .
- 3- احسب معاملات الانحدار الخطي  $a, b$  ( $A, B$ ) وذلك من الصيغ الرياضية المعطاة.
- 4- احسب الخطأ المعياري للتقدير  $(S)$  وذلك من الصيغ الرياضية المعطاة.
- 5- احسب فترة الثقة للمعامل  $a$  كما يأتي:  
(أ) عين القيمة المرغوبة  $t_{\alpha/2}$  ومستوى الثقة المناظر  $(A2)$ .  
(ب) احسب فترة الثقة للمعامل  $a$  بموجب الصيغة الرياضية المعطاة.
- 6- احسب فترة الثقة للمعامل  $b$  بموجب الصيغة الرياضية المعطاة.
- 7- توقف وأنه البرنامج.

### البرنامج المستخدم

```
010 REM **THIS PROGRAM COMPUTES POINT AND INTERVAL ESTIMATES FOR **
020 REM ** THE LINEAR REGRESSION PARAMETERS A & B IN ADDITION TO THE**
030 REM ** STANDARD ERROR OF ESTIMATE**
040 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (N) OF Y AND X PAIRS AND INSURE**
050 REM ** THAT IT IS GREATER THAN 1**
```

```

060 INPUT N
070 IF N < 2 THEN END
080 REM ** 2. ACCUMULATE ALL OF THE REQUIRED SUMS**
090 X1 = 0.0
100 Y1 = 0.0
110 X2 = 0.0
120 Y2 = 0.0
130 P = 0.0
140 REM ** ENTER ALL Y & X PAIRS AND ACCUMULATE THE VARIOUS SUMS**
150 FOR I = 1 TO N
160 INPUT X, Y
170 X1 = X1 + X
180 Y1 = Y1 + Y
190 X2 = X2 + (X * X)
200 Y2 = Y2 + (Y * Y)
210 P = P + (X * Y)
220 NEXT I
230 REM ** 3. COMPUTE THE POINT ESTIMATES OF A & B**
240 B = ((N * P) - (X1 * Y1)) / ((N * X2) - (X1 * X1))
250 A = (Y1 / N) - (B * (X1 / N))
260 A = INT (A * 1000 + 0.5) / 1000
270 PRINT "THE PARAMETER A =: A"
280 REM ** 4. COMPUTE THE STANDARD ERROR OF ESTIMATE (S)**
290 REM ** COMPUTE THE VARIANCE OF X VALUES (X3) AND OF Y VALUES (Y3)**
300 X3 = ((N * X2) - (X1 * X1)) / (N * (N - 1))
310 Y3 = ((N * Y2) - (Y1 * Y1)) / (N * (N - 1))
320 REM ** COMPUTE THE STANDARD ERROR OF ESTIMATE (S)**
330 S = SQR (((N - 1.0) / (N - 2)) * (Y - ((B * B) * X3)))
340 REM ** 5. COMPUTE THE CONFIDENCE INTERVAL FOR THE PARAMETER A**
350 REM ** 5(A): ENTER THE CONFIDENCE LEVEL (A2) & THE VALUE OF T (T2)**
360 INPUT T2, A2

```

```

350 REM ** 5 (B): COMPUTE THE CONFIDENCE INTERVAL **
360   D = (T2 * S * SQR (X2)) / (SQR (X3) * SQR (N * (N - 1.0)))
370   L = A - D
380   H = A + D
390   L = INT (L * 1000 + 0.5) / 1000
400   H = INT (H * 1000 + 0.5) / 1000
410   PRINT "THE CONFIDENCE INTERVAL FOR A IS: L' ... H"
420   PRINT WITH: A2; % CONFIDENCE
430 REM ** 6. COMPUTE THE CONFIDENCE INTERVAL FOR B **
440   D = (T2 * S) / (SQR (X3) * SQR (N - 1.0))
450   L = B - D
460   H = B + D
470   L = INT (L * 1000 + 0.5) / 1000
480   H = INT (H * 1000 + 0.5) / 1000
490   B = INT (B * 1000 + 0.5) / 1000
500   PRINT "THE PARAMETER B = B"
510   PRINT "THE CONFIDENCE INTERVAL FOR B IS: L' ... H"
520   PRINT WITH: A2; % CONFIDENCE
530   S = INT (S * 1000 + 0.5) / 1000
540   PRINT "THE STANDARD ERROR OF THE ESTIMATE IS: S"
550 REM ** 7. END THE PROGRAM **
560   END

```

مثال: إذا كانت لديك نقاط البيانات المبينة أدناه:

11	10	9	8	7	6	5	X
5	3	2	4	1	3	1	Y

احسب:

(أ) التقدير النقطي  $a, b$  لنموذج الانحدار الخطي  $Y = a + bX$

(ب) الخطأ المعياري لتقدير.

(ج) فترة 95% ثقة  $\alpha, \beta$ .

الحل: ادخل البيانات على الصورة التالية:

7

1, 5

3, 6

1, 7

4, 8

2, 9

3, 10

5, 11

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE PARAMETER A = - 0.999

THE CONFIDENCE INTERVAL FOR A IS - 5.87 ... 3.873

WITH 95% CONFIDENCE

THE PARAMETER B = 0.464

THE CONFIDENCE INTERVAL FOR B IS - 0.126 ... 1.055

WITH 95% CONFIDENCE

THE STANDARD ERROR OF THE ESTIMATE IS 1.216

## 2-6 نموذج الانحدار الاسمي

النص الرياضي للمصالة:

اكتب برنامجاً لحساب التقديرات التقطية (d, c) point estimators للنموذج الاسمي  $Y = cd^x$ . وإذا اخذنا الوفايرتم لطرفي الصيغة الرياضية الميئة، فسوف نحصل على:

$$\text{Log } Y = \text{Log } cd^x$$

ويمكن اعادة كتابة الصيغة الرياضية اعلاه كما يلي:

$$\text{Log } Y = \text{Log } c + x \text{Log } d$$

لاحظ التشابه هنا بين الصيغة الرياضية الميئة اعلاه وبين الصيغة العامة للنموذج الخطي المعطاة بالصيغة الرياضية التالية:

$$Y = a + bX$$

افرض ان  $A = \text{log } c$ ,  $B = \text{log } d$ ,  $Y = \text{log } y$ . فاذا عوضنا عن هذه القيم في الصيغ الرياضية العامة للتقديرات الخطية فسوف نحصل على:

$$b = \frac{N \sum X \log Y \sum X \sum \log Y}{N \sum X^2 - (\sum X)^2}$$

$$a = \overline{\log Y} - b\bar{X}$$

وبالحال نحصل على قيمة  $a$ ,  $b$ . فإن الصيغ الرياضية التالية يمكن استخدامها

لحساب  $c, d$ :

$$a = \log c$$

$$b = \log d$$

### خوارزمية الحل:

- 1- من عدد أزواج (N) نقاط البيانات X, Y وتلك من ان هذا العدد اكبر من 1.
- 2- احسب حاصل جمع (X1) القيم X, حاصل جمع (X2) مربعات القيم X, حاصل جمع (L1) لوغاريتمات القيم Y, وحاصل جمع حاصل الضرب التقاطعي للقيم X لوغاريتمات القيم Y (L2).
- 3- احسب المعاملين a, b وذلك من الصيغ الرياضية المعطاة.
- 4- احسب تقدير مطعني الانحدار الاسي c, d وذلك بأخذ لوغاريتم القيم a, b على الترتيب.
- 5- اطبع النتائج.
- 6- توقف وأنه البرنامج

### البرنامج المستخدم

```

010 REM ** THIS PROGRAM ESTIMATES THE EXPONENTIAL REGRESSION
020 REM ** PARAMETERS C & D**
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (N) OF PAIRS OF Y & X**
040   INPUT N
050   IF N < 2 THEN END
060 REM ** 2. ACCUMULATE THE REQUIRED SUMS**
070   X1 = 0.0
080   Y1 = 0.0
090   L1 = 0.0
100   L2 = 0.0
110 REM ** ENTER THE DATA PAIRS (Y, X)**
120   FOR K = 1 TO N
130     INPUT Y, X
140     X1 = X1 + X
150     X2 = X2 + (X * X)
160     L1 = L1 + (LOG (Y)/LOG(10)))
170     L2 = L2 + (X * LOG(Y)/LOG(10)))
175   NEXT K
180 REM ** 3. COMPUTE A & B**

```

```

190  B = ((N * L2) - (X1 * L1)((N * X2) - (X1 * X1))
200  A = (L1/N) - (E * (X1/N))
210 REM ** 4. COMPUTE C & D**
220  C = 10 ** A
230  D = 10 ** B
240  C = INT (C * 1000 + 0.5)/1000
250  D = INT (D * 1000 + 0.5)/1000
260 REM ** 5. PRINT THE RESULTS**
270  PRINT THE EXPONENTIAL REGRESSION PARAMETER C IS: C
280  PRINT THE EXPONENTIAL REGRESSION PARAMETER D IS: D
290 REM ** END THE PROGRAM**
300  END

```

مثال: بلغ عدد الطلبة المسجلين في إحدى الكليات على مدى خمس سنوات كما يلي:

X (السنة)	1	2	3	4	5
Y (عدد الطلبة)	280	360	452	571	725

استخدم طريقة المربعات الصغرى لمطابقة منحنى معرف بالمعادلة التالية:

$$\mu/x = cd^x$$

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

5  
280, 1  
360, 2  
452, 3  
571, 4  
725, 5

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE EXPONENTIAL REGRESSION PARAMETER C IS 222.386  
THE EXPONENTIAL REGRESSION PARAMETER D IS 1.267

### 3-6 معامل بيرسون العزومي للارتباط Pearson's Moment Correlation Coefficient

النص الرياضي للمصالة:

إذا كانت لديك مجموعة من المتغيرات  $X$  و  $Y$ ، فاكذب برنامجاً لقياس الارتباط الخطي بين المتغيرات  $X$  و  $Y$ . وتسمى هذه القيمة "معامل الارتباط" correlation coefficient ويرمز لها بالحرف  $(r)$ . ويمكن حساب هذا المعامل باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$r = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{(N\sum X^2 - (\sum X)^2)(N\sum Y^2 - (\sum Y)^2)}}$$

خوارزمية الحل:

- 1- عين عدد ازواج  $(N)$  نقاط البيانات  $(X, Y)$  وتأكد من ان هذا العدد يساوي 2 أو اكبر.
- 2- قم باجراء ما يأتي لكافة ازواج نقاط البيانات  $(X, Y)$ :
  - (أ) احسب مجموع  $(X1)$  مكونات العنصر  $X$ .
  - (ب) احسب مجموع  $(X2)$  مربعات العنصر  $X$ .
  - (ج) احسب مجموع  $(Y1)$  مكونات العنصر  $Y$ .
  - (د) احسب مجموع  $(Y2)$  مربعات العنصر  $Y$ .
  - (هـ) احسب مجموع  $(P)$  حاصل ضرب  $X$  في  $Y$ .
- 3- احسب بوسط  $(N1)$  من الصيغة الرياضية.
- 4- احسب مقام  $(D1)$  من الصيغة الرياضية.
- 5- احسب معامل بيرسون العزومي للارتباط  $(R)$  وذلك بقسمة البسط  $(N1)$  من الخطوة 3 على المقام  $(D1)$  من الخطوة 4.
- 6- قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية.



-7 اطبع النتيجة.

-8 توقف رانه البرنامج.

### البرنامج المستخدم

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE PEARSON PRODUCT MOMENT**
020 REM ** CORRELATION COEFFICIENT**
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (N) OF DATA PAIRS (X, Y)**
040     INPUT N
050     IF N < 2 THEN END
060 REM ** 2. COMPUTE THE VARIOUS SUMS INDICATED IN THE ALGORITHM**
070     X1 = 0.0
080     X2 = 0.0
090     Y1 = 0.0
100     Y2 = 0.0
110     P = 0.0
120     FOR I = 1 TO N
130         INPUT X, Y
140         X1 = X1 + X
150         X2 = X2 + (X * X)
160         Y1 = Y1 + Y
170         Y2 = Y2 + (Y * Y)
180         P = P + (X * Y)
190     NEXT I
200 REM ** 3. COMPUTE THE NUMERATOR (N1) OF THE FORMULA**
210     N1 = (N * P) - (X1 * Y1)
220 REM ** 4. COMPUTE THE DENOMINATOR (D1) OF THE FORMULA**
230     D1 = SQR (((N * X2 (X1 ** 2.0)) * (N * Y2 - (Y1 ** 2.0))))
240 REM ** 5. COMPUTE THE PEARSON PRODUCT MOMENT CORRELATION COEF.(R)**
250     R = N1/D1
260 REM**6. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NEAREST 3RD DECIMAL**
270     R = INT (R * 1000 + 0.5)/1000
280 REM ** 7. PRINT THE RESULT**
290     PRINT THE PEARSON PRODUCT MOMENT CORRELATION COEFF IS: R
300 REM ** 8. END THE PROGRAM**
310     END
    
```

مثال : يبين الجدول التالي عدد القطع التالفة ومجموع عدد القطع التي قام بانتاجها سبعة عمال في احد مصانع السيارات:

9	29	24	17	12	25	36	عدد القطع التالفة
101	154	98	162	136	111	118	العدد الكلي للقطع المنتجة

احسب معامل بيرسون العزومي للارتباط للبيانات المبينة اعلاه.

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

7  
36, 118  
25, 111  
12, 136  
17, 162  
24, 98  
29, 154  
9, 101

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE PEARSON PRODUCT MOMENT CORRELATION COEFFICIENT IS 0.019

مثال : بلغ عدد الساعات الاسبوعية التي درستها مجموعة من الطلبة في احد المساقات اضافة الى العلامات التي حصلوا عليها في الامتحان النهائي كما مبين في الجدول التالي:

9	14	20	13	5	10	عدد الساعات/اسبوع
95	68	81	76	70	85	العلامة النهائية

احسب معامل بيرسون العزومي للارتباط للبيانات المبينة اعلاه.

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

6  
10, 85  
5, 70  
13, 76  
20, 81  
14, 68  
9, 95

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE PEARSON PRODUCT MOMENT CORRELATION COEFFICIENT IS -0.022

4-6 معامل سبيرمان لارتباط الرتب  
Spearman's Rank Correlation Coefficient

النص الرياضي للمسألة:

إذا كان لديك مجموعة مكونة من (N) من القيم المرتبة  $X_1, X_2, \dots, X_N$  ومجموعة أخرى مكونة من (N) من القيم المرتبة  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$  فاكاتب برنامجاً لحساب معامل سبيرمان لارتباط الرتب (p) بموجب الصيغة الرياضية التالية:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^N d_i^2}{N(N^2 - 1)}$$

حيث  $\sum d_i^2$  هو مجموع مربعات الفروق لازواج من المشاهدات عددها (N).

خوارزمية الحل:

- 1- عين عدد ازواج (N) الرتب المطلوب استخدامها لاجراء الاختبار وتأكد من أن هذا العدد يساوي 2 أو أكبر.
- 2- احسب مجموع مربعات الفروق (S) للرتب لكافة ازواج نقاط البيانات.

- 3 احسب معامل سبيرمان لارتباط الرتب.
- 4 قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية.
- 5 اطبع النتيجة.
- 6 توقف وانته البرنامج

### البرنامج المستخدم

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE SPEARMAN RANK CORRELATION**
020 REM ** COEFFICIENT**
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (N) OF PAIRS OF RANKS (X, Y)**
040   INPUT N
050   IF N < 2 THEN END
060 REM ** 2. COMPUTE THE SUM OF SQUARED DIFFERENCES IN RANK (S)**
070   S = 0.0
080   FOR I = 1 TO N
090     INPUT X, Y
100     S = S + ((X - Y)**2)
110   NEXT I
120 REM ** 3. COMPUTE THE SPEARMAN RANK CORR. COEFF. (R)**
130   R = 1.0 - ((6.0 * S)/N*(N * N - 1)))
140 REM ** ROUND THE RESULT TO THE NEAREST 3RD DECIMAL PLACES**
150   R = INT (R * 1000 + 0.5)/1000
160 REM ** 5. PRINT THE RESULT**
170   PRINT "THE SPEARMAN RANK CORRELATION COEFFICIENT IS:R"
180 REM ** 6. END THE PROGRAM**
190   END

```

احسب معامل سبيرمان لارتباط الرتب للبيانات التالية:

مثال

8	6	7	4	3	1	X
7	4	8	1	5	2	Y

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

6  
1, 2  
3, 5  
4, 1  
7, 8  
6, 4  
8, 7

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE SPEARMAN RAND CORRELATION COEFFICIENT IS 0.429

مثال : احسب معامل سبيرمان للارتباط بالرتب بين المعدلات الآتية لعشرة طلاب في امتحان الفصل الثاني والامتحان النهائي:

73 91 87 55 60 77 90 65 82 75	(X) معدل الطالبة في امتحان الفصل الثاني
71 89 88 57 50 80 90 55 85 69	(Y) معدل الطالب في الامتحان النهائي

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

10  
75, 69  
82, 85  
65, 55  
90, 90  
77, 80  
60, 50  
55, 57  
87, 88  
91, 89  
73, 71

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE SPEARMAN RAND CORRELATION COEFFICIENT IS 0.94

### 5-6 اختبار دلالة معامل بيرسون العزومي للارتباط

النص الرياضي للمسألة:

اكتب برنامجاً لما يلي:

(أ) حساب معامل بيرسون العزومي للارتباط.

(ب) لاختبار ما اذا كان معامل الارتباط يختلف عن القيمة الصفرية أو عن أية قيمة غير صفرية معينة. فإذا كان المطلوب اختبار  $(p \neq 0)$  مقابل الفرضية البديلة  $(p = 0)$ ، فإن هذه الدالة هي من نوع دالة الاختبار  $t$ ، وهي التي يمكن حسابها بموجب الصيغة الرياضية التالية:

$$t = \frac{r}{\sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}}}$$

حيث  $r$  تمثل معامل الارتباط للمينة،  $n$  تمثل عدد ازواج نقاط البيانات للمينة التي لها درجات حرية تساوي  $(n-2)$ . اما اذا كانت الفرضية المبدئية  $(p = p_0)$ ، فإن الاحصاء:

$$z = \frac{Z - m_z}{\sigma_z}$$

يلتزم توزيعاً طبيعياً تقريبياً له:

$$Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$$

$$m_z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+p}{1-p}$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\sqrt{n-3}}$$

حيث  $z$  تمثل المتغير العشوائي المعياري،  $Z$  تمثل احصاء فيشر في نوع  $Z$ ،  $r$  تمثل معامل الارتباط العينة،  $\rho$  تمثل معامل الارتباط المجتمع،  $n$  تمثل عدد أزواج نقاط البيانات،  $m_x$  و  $m_y$  الانحراف المتوسط والانحراف المعياري على الترتيب.

#### خوارزمية الحل:

- 1- احسب معامل الارتباط ( $R$ ) بنفس طريقة حساب معامل ارتباط بيرسون.
- 2- عين القيمة ( $R2$ ) المطلوب مقارنة معامل الارتباط المحسوب ( $R$ ) بها.
- 3- اذا كانت ( $R2$ ) لا تساوي 0.0 فالذهب الى الخطوة 5، والا فاستمر بتنفيذ الخطوات اللاحقة.
- 4- عين ما اذا كان معامل الارتباط ( $R$ ) يختلف عن قيمة 0.0. احسب قيمة  $T = R / \sqrt{(1 - R^2) / (N - 2)}$  ، حيث  $N$  عدد أزواج البيانات في العينة، ثم اطبع قيمة  $T$  حيث تنتهي المهمة عند هذا الحد.
- 5- احسب  $z = (Z - m_z) / \sigma_z$  ثم اطبع  $z$ .
- 6- توقف وانه البرنامج.

#### البرنامج المستخدم

```
010 REM ** THIS PROGRAM TESTS THE SIGNIFICANCE OF A PEARSON**
020 REM ** PRODUCT MOMENT CORRELATION COEFFICIENT**
030 REM ** 1. COMPUTE THE CORRELATION COEFFICIENT (R)**
040 INPUT N
050 IF N < 2 THEN END
060 X1 = 0.0
070 Y1 = 0.0
080 X2 = 0.0
090 Y2 = 0.0
100 P2 = 0.0
```

```

110  FOR I=1 TO N
120  INPUT X, Y
130  X1=X1 + X
140  Y1=Y1 + Y
150  X2=X2 + (X * X)
160  Y2=Y2 + (Y * Y)
170  P2=P2 + (X * Y)
180  NEXT I
190  N2=(N * P2) - (X1 * Y1)
200  D2=SQR (((N * X2 - (X1 ** 2.0)) * (N * Y2 - (Y1 ** 2.0))))
210  R = N2/D2
220 REM ** ROUND THE RESULT TO THE NEAREST 3RD DECIMAL PLACES*
230  R = INT (R * 1000 + 0.5)/1000
240  PRINT THE CORRELATION COEFFICIENT IS: R
250 REM ** 2. ENTER THE VALUE (R2) TO COMPARE (R) TO IT**
260  INPUT R2
270  PRINT THE VALUE OF RHO IS:R2
280 REM ** 3. CHECK R2 AND MAKE THE DECISION**
290  IF R2 <> 0.0 THEN GOTO 380
300 REM ** 4.THIS ROUTINE DETERMINES WHETHER(R)IS DIFFERENT FROM 0.0**
310 REM ** COMPUTE THE VALUE OF (T)**
320  T=R/SQR (((1.0 - (R * R))/(N - 2)))
330  T= INT (T * 1000 + 0.5)/1000
340  PRINT THE VALUE OF T IS: T
350  END
360 REM ** 5. THE FOLLOWING ROUTING DETERMINES WHETHER (R) IS**
370 REM ** DIFFERENT THAN SOME NONZERO VALUE**
380  C = LOG ((1.0 + R)/(1.0 - R))/2.0
390  M1 = LOG ((1.0 + R2)/(1.0 - R2))/2.0
400  S2 = 1.0/SQR (N-3.0)
410 REM ** COMPUTE THE VALUE OF (Z)**
420  Z=(C - M1)/S2
430  Z= INT (Z * 1000 + 0.5)/1000
440  PRINT THE VALUE OF Z IS: Z
450 REM ** 6. END THE PROGRAM**
460  END

```



مثال، : بلغ عدد الساعات الاسبوعية التي درستها مجموعة من الطلاب لاهد المساقات وكذلك العلامات التي حصلوا عليها في الامتحان كما يلي:

9	14	20	13	5	10	عدد الساعات/اسبوع
95	86	81	76	70	85	العلامة النهائية

احسب معامل بيرسون العزومي للارتباط للبيانات المذكورة اعلاه.

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

6  
10, 85  
5, 70  
13, 76  
20, 81  
14, 68  
9, 95

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE CORRELATION COEFFICIENT IS 0.222

والان ادخل قيمة (R2) وتكن 0.

0

وسوف يظهر الجواب التالي:

0

THE VALUE OF R2 IS 0

THE VALUE OF T IS -0.043

مثال : يبين الجدول التالي القطع المنتجة التالية ومجموع عدد القطع التي قام بانتاجها سبعة عمال في احد مصانع السيارات:

9	29	24	17	12	25	36	عدد القطع التالية
101	154	98	162	136	111	118	مجموع القطع

الحل: ادخل البيانات على الصورة التالية:

7  
36, 118  
25, 111  
12, 136  
17, 162  
24, 98  
29, 154  
9, 101

وسوف يظهر الجواب الاول كما يلي:

THE CORRELATION COFFICIENT IS 0.019

والآن ادخل قيمة (R2) وتكون 0 مثلاً:

0

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

0

THE VALUE OF R2 IS 0

THE VALUE OF T IS 0.042

أمثلة:

1- احسب الانحدار الخطي للبيانات التالية:

12	13	15	19	20	17	12	14	X
27	25	22	27	34	26	20	24	Y

2- استخدم البيانات المبينة في المسألة (1) لحساب معامل الارتباط للبيانات المذكورة.

3- يبين الجدول التالي عدد العضوات التي باعها شركة النظارات الوطنية خلال سبعة أعوام. احسب الانحدار الاسمي ثم عين النمو المتوقع في مبيعات هذه الشركة للأعوام 12-8.

السنة	1	2	3	4	5	6	7
عدد العضوات المباعة	5000	6000	10000	17000	20,000	25000	30000



## الفصل السابع

### السلاسل الزمنية

#### (1-7) مفهوم السلسلة الزمنية

السلسلة الزمنية : مجموعة مشاهدات حول ظاهرة معينة أخذت بترتيب زمني معين عادة ما يكون هذا الترتيب فيه تساوي الفترات الزمنية مثل الساعات، الايام، الاشهر، او السنوات المتتالية.

امثلة متنوعة على السلاسل الزمنية.

\* المبيعات اليومية في مركز بيع الكتب لمدة شهر.

\* قراءة درجات حرارة المريض في ساعة لمدة يوم واحد.

\* قراءات الانتاج الشهري لمدة سنة في شركة الادوية العربية.

\* الانتاج الشهري من البترول لدولة الكويت ولعدة سنوات.

كل هذه القراءات وتتابعها الزمني جميعها تمثل سلسلة زمنية.

#### (2-7) تحليل السلسلة الزمنية من خلال ايجاد المتوسطات المتحركة.

في هذا البند يبرز سؤال وهو ما المقصود من تحليل السلسلة الزمنية؟ وللإجابة نقول بان المقصود من تحليل السلسلة الزمنية هو.

(1) معرفة التغيرات التي تطرأ على السلسلة خلال الفترات المتساوية التي اخذت عندها قراءة المشاهدات.

(2) معرفة طبيعة العلاقة بين الظاهرة قيد الدراسة والظواهر الاخرى ولعمل رسم منحنى السلسلة يمكن ان يبرز جانب من هذه الفوائد لعملية تحليل السلسلة الزمنية.

(3) معرفة ماضي الظاهرة وكيفية تغيرها.

4) التنبؤ بمستقبل الظاهرة قيد الدراسة مما تفيد لاتخاذ قرار معين وعند اجراء عملية التحليل للسلسلة اول عمل نقوم به رسم المنحنى البياني لقيم المشاهدات مع الزمن ونعين النقاط وبعد تعيين النقاط ورسم هذا المنحنى يبرز لنا اهمية استخدام المعدلات المتحركة حتى نحصل على خط امس لانها تظهر تعرجات كبيرة في المنحنى وهذه التعرجات تجمعنا طلق على السلسلة بانها خشنة ونستطيع قياس مدى الخشونة من خلال ايجاد معامل نسميه بمعامل الخشونة نحدد من العلاقة التالية:

$$\text{معامل الخشونة} = \frac{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2}{\sum_{t=1}^n (x_t - \bar{x})^2} \quad (1-7)$$

وكما كان هذا الرقم قليلاً كلما كانت السلسلة لمساء.

ولتوضيح هذا المفهوم نورد المثال التالي

مثال: احسب معامل الخشونة للسلسلة التالية 7 ، 9 ، 14 ، 15 ، 20 ، 19

الحل: لحساب معامل الخشونة نكون جدول الحل (1-7).

ن	س <sub>ت</sub>	س <sub>ت-1</sub>	س <sub>ت-س<sub>ت-1</sub></sub>	س <sub>ت-س<sub>ت-1</sub></sub> <sup>2</sup>	س <sub>ت</sub> - $\bar{x}$	(س <sub>ت</sub> - $\bar{x}$ ) <sup>2</sup>
1	7	-	-	-	-	-
2	9	7	2	4	5-	25
3	14	9	5	25	0	0
4	15	14	1	1	1	1
5	20	15	5	25	6	36
6	19	20	1-	1	5	25
				56		87

جدول (1-7)

$$14 = \frac{84}{6} = \frac{19+20+15+14+9+7}{6} = \bar{x}$$

ثم نجد معامل الخشونة من العلاقة الرياضية التالية.

$$0.64 = \frac{56}{87} = \frac{\sum_{j=2}^n (x_j - \bar{x})^2}{\sum_{j=2}^n (x_j - \bar{x})^2} = \text{معامل الخشونة}$$

ولجعل السلسلة ملمساء هناك عدة طرق نذكر منها

### (3-7) طريقة المتوسطات المتحركة:

لايجاد المتوسطات المتحركة لابد من اتباع الخطوات التالية

(أ) في حالة ما اذا كان المتوسط فردياً أي ان ل = 3، 5، 7، .....، ل = طول المتوسط

\* نحدد القراءة الاولى عندما كان الزمن صفراً ونرمز لها بالرمز ص. والقراءة الثانية ص<sub>1</sub> وهكذا تتكون السلسلة كما في جدول (2-7).

الزمن	0	1	2	3	.....	ن-1
قيمة الملاحظة ص	ص <sub>0</sub>	ص <sub>1</sub>	ص <sub>2</sub>	ص <sub>3</sub>		ص <sub>ن-1</sub>

جدول (2-7)

\* نرمز لقيم المتوسطات المتحركة بالرمز ص

\* نحدد موقع المتوسط المتحرك الاول من العلاقة التالية

$$(2-7) \dots \dots \dots \frac{1+n}{2} = \frac{\text{طول المتوسط} + 1}{2} = \text{موقع المتوسط الاول}$$

مثال: إذا كان طول المتوسط 3 لسلسلة زمنية فإن موقع المتوسط الأول  $= \frac{1+3}{2} = 2$  أي انه يقابل الملاحظة الثانية في السلسلة.

مثال: إذا كان طول المتوسط 5 لسلسلة زمنية فإن موقع المتوسط الأول  $= \frac{1+5}{2} = 3$  أي انه يقابل الملاحظة الثالثة في السلسلة. وهكذا

\* بعد تحديد موقع المتوسط الأول نلجأ الى تعيين قيمة المتوسط نفسه وعلى سبيل المثال اذا كان لدينا الطول 3 وقيم المشاهدات ص<sub>0</sub>، ص<sub>1</sub>، ص<sub>2</sub>، ص<sub>3</sub>، ص<sub>4</sub>، ص<sub>5</sub>، ص<sub>6</sub>، ص<sub>7</sub>، ص<sub>8</sub>، ص<sub>9</sub> فإن موقع المتوسط الأول ص<sub>1</sub>  $= \frac{1+3}{2} = 2$  أي مقابل الملاحظة الثانية.

$$\text{وقيمة هذا المتوسط} = \frac{\text{ص}_0 + \text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \text{ص}_4}{3}$$

الملاحظة السابقة للمتوسط + الملاحظة المقابلة للمتوسط + الملاحظة اللاحقة للمتوسط

3

$$\text{ص}_2 = \frac{\text{ص}_0 + \text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \text{ص}_4}{3}$$

ثم نجد

$$\text{ص}_3 = \frac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2 + \text{ص}_3 + \text{ص}_4 + \text{ص}_5}{3}$$

وعند كتابة جدول يشمل قيم المشاهدات والمتوسطات المتحركة المقابلة لها كما في الجدول (7-3).

الزمن ٥	0	1	2	3	4	.....	2-ن	1-ن
الملاحظات ص	ص <sub>0</sub>	ص <sub>1</sub>	ص <sub>2</sub>	ص <sub>3</sub>	ص <sub>4</sub>	.....	ص <sub>2-ن</sub>	ص <sub>1-ن</sub>
المتوسطات المتحركة ص		ص <sub>1</sub>	ص <sub>2</sub>	ص <sub>3</sub>	ص <sub>4</sub>	..	ص <sub>1-ن</sub>	-

جدول (7-3)



ملاحظات:

- (1) نلاحظ ان ص. لم يقابلها متوسط متحرك لانه لم يسبقها اية مشاهدة.  
 (2) ص-1 لم يقابلها متوسط متحرك وهكذا بالنسبة لباقي الاطوال الفردية  
 مثال: اوجد المتوسطات المتحركة بطول 3 للسلسلة الزمنية

7، 11، 8، 19، 25، 14، 20.

الحل: نرتب قيم المشاهدات في جدول زمني كما هو مبين ادناه في جدول (7-4).

ص6	ص5	ص4	ص3	ص2	ص1	ص0	
6	5	4	3	2	1	0	الزمن ن
20	14	25	19	8	11	7	المشاهدات صر
-	19.67	19.33	17.33	12.67	8.67		المتوسطات صر

جدول (7-4)

نحدد موقع المتوسط المتحرك الاول =  $\frac{1+3}{2} = 2$  مقابل ص1 = 11

$$\text{نجد: } \frac{26}{3} = \frac{8+11+7}{3} = \frac{\text{ص0} + \text{ص1} + \text{ص2}}{3} = \text{ص1}$$

$$12.67 = \frac{1+8+11}{3} = \frac{\text{ص1} + \text{ص2} + \text{ص3}}{3} = \text{ص2}$$

$$17.33 = \frac{25+1+8}{3} = \frac{\text{ص2} + \text{ص3} + \text{ص4}}{3} = \text{ص3}$$

$$19.33 = \frac{14+25+19}{3} + \frac{\text{ص3} + \text{ص4} + \text{ص5}}{3} = \text{ص4}$$

$$19.67 = \frac{20+14+25}{3} = \frac{\text{ص4} + \text{ص5} + \text{ص6}}{3} = \text{ص5}$$

مثال : اوجد المتوسطات المتحركة بطول 5 للسلسلة الزمنية

7، 13، 21، 23، 27، 19، 17.

الحل : نرتب البيانات التالية في الجدول (5-7).

الزمن	0	1	2	3	4	5	6
الملاحظات	7	13	21	23	27	19	17
المتوسطات	-	-	18.2	20.6	21.4	-	-

جدول (5-7)

نجد ترتيب الملاحظة المقابلة للمتوسط الاول -  $3 = \frac{1+5}{2}$ .

فيكون ترتيب الملاحظة الثالثة هي المقابلة لاول متوسط متحرك.

- نجد قيمة المتوسط المتحرك من العلاقة

$$\hat{ص}_2 = \frac{ص_0 + ص_1 + ص_2 + ص_3 + ص_4}{5}$$

$$18.2 = \frac{91}{5} = \frac{27 + 23 + 21 + 13 + 7}{5} = \hat{ص}_2$$

$$20.6 = \frac{103}{5} = \frac{19 + 27 + 23 + 21 + 13}{5} = \frac{ص_1 + ص_2 + ص_3 + ص_4 + ص_5}{5} = \hat{ص}_3$$

$$21.4 = \frac{107}{5} = \frac{17 + 19 + 27 + 23 + 21}{5} = \frac{ص_2 + ص_3 + ص_4 + ص_5 + ص_6}{5} = \hat{ص}_4$$

ب- اذا كان طول المتحرك زوجيا لذا نتبع الخطوات التالية

- نكون جدول نحدد فيه الزمن وقيم الملاحظات الاصلية

- لتحديد موقع المتوسط، الاول نكتب العلاقة التالية

موقع المتوسط المتحرك الاول-  $\frac{1+l}{2}$

فعندما يكون ل=4 فان موقع المتوسط الاول يكون  $= \frac{1+4}{2} = 2.5$  أي ان المتوسط

يقع بين الملاحظة الثانية والملاحظة الثالثة والرابعة وهكذا.

وحتى يكون المتوسط المتحرك مقابل أي مشاهدة اصلية نلجأ للخطوة التالية.

- نجد متوسط متحرك مركزي بطول 2 فيكون هذا المتوسط مقابل للملاحظة الثالثة. والرابعة وهكذا.

مثال: اوجد متوسط متحرك بطول 4 لقيم المشاهدات التالية

4، 9، 15، 8، 21، 24، 11، 12.

الحل: نجد ترتيب موقع المتوسط المتحرك الاول-  $= \frac{1+4}{2} = 2.5$

-ترتب البيانات ضمن الجدول (6-7).

الزمن	0	1	2	3	4	5	6	7
قيم الملاحظة	4	9	15	8	21	24	11	12
ص7								
ص8								

جدول (6-7)

$$13.25 = \frac{53}{4} = \frac{21+8+15+9}{4} =_{35} \text{ص}$$

$$9 = \frac{8+15+9+4}{4} =_{25} \text{ص}$$

$$16 = \frac{64}{4} = \frac{11+24+21+8}{4} =_{55} \text{ص}$$

$$17 = \frac{68}{4} = \frac{24+21+8+15}{4} =_{45} \text{ص}$$

$$17 = \frac{68}{4} = \frac{12+11+24+21}{4} =_{65} \text{ص}$$

$$11125 = \frac{1325 + 9}{2} = \frac{\text{متى}_{2.5} + \text{متى}_{3.5}}{2} = \text{متى}_3$$

$$15125 = \frac{17 + 13.25}{2} = \frac{\text{متى}_{4.5} + \text{متى}_{3.5}}{2} = \text{متى}_4$$

$$165 = \frac{16 + 17}{2} = \frac{\text{متى}_{5.5} + \text{متى}_{4.5}}{2} = \text{متى}_5$$

$$16.5 = \frac{17 + 16}{2} = \frac{\text{متى}_{5.5} + \text{متى}_{6.5}}{2} = \text{متى}_6$$

#### (4-7) مركبات السلسلة الزمنية.

عندما نحصل على قيم المشاهدات للسلسلة الزمنية لا بد من دراسة المؤثرات التي قد تؤثر على هذه القراءات و ماهذه المؤثرات الا ما نسميها بمركبات السلسلة الزمنية والتي ناتج حاصل ضربها معا يعطي قيم المشاهدات الاصلية ونعبر عن ذلك بالمعادلة التالية.

(3-7).....

$$\boxed{\text{ص} = \text{ت} \times \text{ف} \times \text{د} \times \text{خ}}$$

حيث ص: هي قيمة المشاهدات الاصلية.

ت: مركبة الاتجاه العام.

ف: المركبة الفصلية (الموسمية)

د: مركبة الدورة.

خ: مركبة الخطأ

وستتناول كل مركبة من المركبات آنفة الذكر على حدى.

#### أ- مركبة الاتجاه العام.

تعريف.: مركبة الاتجاه العام هي المركبة التي توضح مسيرة السلسلة بشكل عام وعلى مدى بعيد ويمكن استخراجها من خلال معادلة انحدار ص/س والمتمثل بالعلاقة.

(4-7).....

$$\boxed{\text{ص} = \text{أس} + \text{ب}}$$

ومن الملاحظ من العلاقة اعلاه ان قيمة  $v$  مرتبطة بكل من  $A$ ،  $S$  بشكل رئيسي ولذا يحتمل تزايد  $v$  او تناقصها او قد تحافظ على قيمتها ثابتة. كذلك هناك طرق اخرى لاججاد هذه المركبة منها طريقة الانتشار (التمهيد باليد)، طريقة المتوسطات المتحركة ، وكذلك طريقة نصف السلسلة المتحركة.

ونحن يصدد هذه المركبة لاي  $D$  من اعطاء امثلة توضح الافكار التي وردت سابقا وحتى لا يكون هناك لبس في الموضوع.

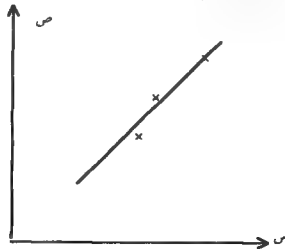
### طريقة الانتشار (التمهيد باليد):

مثال : البيانات التالية تمثل قيم مشاهدات في سلسلة زمنية لقراءات تمثل انتاج مصنع للأحذية خلال اسبوع معين كما في جدول (7-7).

اليوم	السبت	الاحد	الاثنين	الثلاثاء	الاربعاء	الخميس
مقدار الانتاج	120	140	130	145	115	125

جدول (7-7)

حيث مقدار الانتاج بالزوج. والمطلوب ايجاد مركبة الاتجاه العام عن طريق رسم انتشاري وايجاد معادلة الخط العام



شكل (1-7)

ولايجاد معادلة خط الاتجاه نأخذ نقطتين تقعان على الخط للمهد. ونرمز لهما بالرمز أ، ب ونكتب احداثي كل منهما مع ملاحظة اعطاء تسلسل عددي 1، 2، 3، ...، 6، للأيام حتى يسهل إيجاد معادلة خط الاتجاه العام والتي يمكن إيجادها من العلاقة الرياضية

$$\frac{ص - ص_1}{س - س_1} = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1}$$

$$\frac{ص - 130}{س - 3} = \frac{145 - 130}{4 - 3}$$

$$ص - 130 = 15 (س - 3)$$

$$ص = 130 - 15س + 45$$

$$ص = 15س + 85 \text{ أو}$$

وهذه الطريقة تختلف من شخص الى آخر مما يسبب لها عدم الدقة.

ب- طريقة المتوسطات المتحركة.

قد يحتاج الى تمهيد لخط السلسلة لكثرة التعرجات التي قد تظهر في السلسلة ولكي نجعل الخط املس نلجأ الى تمهيد هذا الخط عن طريق المتوسطات المتحركة. وقد سبق وان تناولنا المتوسطات المتحركة بشكل مفصل.

ج- طريقة المربعات الصغرى.

وهذه الطريقة اكثر دقة من سلفيها وهي ان نجد معادلة خط الانحدار العام ل ص/س

$$ص = أس + ب.$$

ثم نجد أ من العلاقة

$$A = \frac{\sum_{i=1}^n ص_i \sum_{i=1}^n س_i - \sum_{i=1}^n ص_i \sum_{i=1}^n س_i}{\sum_{i=1}^n س_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n س_i \right)^2 / n}$$

..... (5-7)

ونجد ب من العلاقة:  $\bar{ب} - \bar{ص} - \bar{أ} = \bar{س}$  ..... (6-7)

مثال: البيانات التالية تمثل قراءات لدرجة حرارة مريض خلال ست ساعات مأخوذة القراءات كل ساعة كما في الجدول (7-8).

زمن القراءات	1	2	3	4	5	6
درجة الحرارة	37	38	38.5	37.5	37	37

جدول (7-8)

الحل: نشكل جدول يحوي جميع البيانات المطلوبة للحل كما في جدول (7-9).

س	ص	س.ص	س <sup>2</sup>	ص <sup>3</sup>
1	37	37	1	1369.00
2	38	76	4	1444.00
3	38.5	115.5	9	1482.25
4	37.5	150	16	1406.25
5	37	185	25	1369
6	37	222	36	1369
21	225	785.5	91	8439.5

جدول (7-9)

ولإيجاد  $\bar{أ}$  نطبق العلاقة اعلاه:

$$0.114 = \frac{2 -}{17.5} = \frac{785.5 - 785.5}{73.5 - 91} = \frac{\frac{225 \times 21}{6} - 785.5}{\frac{21 \times 21}{6} - 91} = 1$$

ثم نجد ب -  $\bar{ص} - \bar{أ} = \bar{س}$   $37.101 = 0.399 - 37.5 = 3.5 \times 0.114 - 37.5 =$

∴ معادلة الاتجاه العام هي:  $ص = 0.114س + 37.101$

### د- طريقة متوسط نصف السلسلة .

وهذه الطريقة اقل دقة من طريقة المربعات الصغرى الا انها اكثر دقة من المتوسطات المتحركة وطريقة الانتشار . وتتلخص بالخطوات التالية.

- نجد المتوسط الحسابي لنصف السلسلة الثاني اذا كان عدد المشاهدات زوجي اما اذا كان عدد المشاهدات فردي فتهمل المشاهدة الوسطى ثم نجد المتوسط الحسابي للنصف الثاني وبهذا يتعين الاحداثي الصادي للنقطتين.

- لتحديد الاحداثي السيني نعطي قيم المشاهدات ترقيم متسلسل سواء كانت المشاهدات قيما او غير ذلك ثم نجد المتوسط الحسابي للنصف الاول من القيم سواء كان عددها زوجي ام فردي فيكون المتوسط هو الاحداثي السيني وكذلك للنصف الثاني المتوسط الحسابي يكون هو الاحداثي السيني وبذا تتعين النقطتين.

- نصل بين النقطتين بعد تعينهما على المستوى الاحداثي فيكون لدينا خط الاتجاه العام.

- نجد معادلة خط الاتجاه العام من العلاقة.

$$\frac{ص - ص_1}{ص_2 - ص_1} = \frac{ص - ص_1}{ص_2 - ص_1}$$

مثال: اذا كان انتاج مصنع للألبسة الصوفية خلال عشرة سنوات مبينة بالجدول (7-10).

السنة س	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979
عدد القطع من المنتجة	53	64	67	60	69	74	67	79	85	90

جدول (7-10)

والمطلوب إيجاد معادلة خط الاتجاه العام بطريقة متوسط نصف السلسلة.

الحل: نتبع الخطوات التالية

نكون جدول يشمل جميع المحتويات اللازمة للحل وهو كما في الجدول (7-11).



السنة س	السنة بالترقيم س	عدد القطع المتحة ص	متوسط نصف س	متوسط نصف ص
1970	1	53	الأول - 3	الأول - 62.6
1971	2	64		
1972	3	67		
173	4	60		
1974	5	69		
1975	6	74	الثاني - 8	الثاني - 79
1976	7	67		
1977	8	79		
1978	9	85		
1979	10	90		

جدول (7-11)

$$\text{نصف المتوسط الاول لـ ص} = \frac{69 + 60 + 67 + 64 + 53}{5} = 62.6 = \text{ص}_1$$

$$\text{نصف المتوسط الاول لـ ص} = \frac{90 + 85 + 79 + 67 + 74}{5} = 79 = \text{ص}_2$$

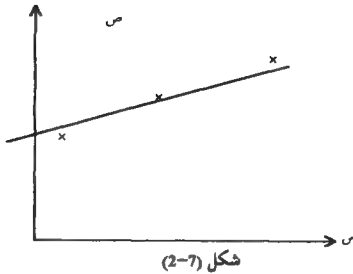
$$\text{نصف المتوسط الاول لـ س} = \frac{5 + 4 + 3 + 2 + 1}{5} = 3 = \text{س}_1$$

$$\text{نصف المتوسط الثاني لـ س} = \frac{10 + 9 + 8 + 7 + 6}{5} = 8 = \text{س}_2$$

∴ النقطتين هما أ(3، 62.6) ، ب(8، 79)

- نعين النقطتين على المستوى الاحداثي.

- نصل بين النقطتين أ، ب فيكون هذا هو خط الاتجاه العام.



نجد معادلة خط الاتجاه العام

$$\frac{16.4}{5} = \frac{62.6 - 79}{3 - 8} = \frac{62.6 - ص}{3 - س}$$

$$313 - 49.2س = 16.4 - 313س$$

$$263.8 = 16.4س$$

$$ص = \frac{263.8}{5} + \frac{16.4}{5}س$$

$$ص = 52.76 + 3.28س$$

وهذه هي معادلة الاتجاه العام.

#### 5-7) مركبة الفصل او المركبة الموسمية.

لعل هذه الظاهرة تعني في الدرجة الاولى ايجاد قيمة الظاهرة على اعتبار انها لم تتأثر

الا بالموسم وحساب الاتار الموسمية هناك طريقتان.

أ- طريقة النسب للمتوسط المتحرك.

ب- من العلاقة  $ص = ت \times ف \times د \times خ$

فعندما تكون المركبة الاتجاهية والمركبة الدورية والخطأ معلومتين نستطيع إيجاد المركبة الموسمية. وهكذا الا اننا سنتناول الطريقة الاولى بشيء من التفصيل ولسهولة التعامل معها من خلال المثال التالي.

مثال: اذا كان انتاج مصنع معين خلال خمس سنوات حيث ان كمية الانتاج مأخوذة كل ثلاثة شهور وثبت البيانات بالجدول التالي والانتاج بآلاف الوحدات كما في الجدول (7-12).

ربيع السنة	1976	1977	1978	1979	1980
الربع الاول	7	12	8	20	25
الربع الثاني	9	11	13	21	27
الربع الثالث	10	14	15	23	28
الربع الرابع	5	20	16	19	27

جدول (7-12)

والمطلوب إيجاد النسب الموسمية لهذا الانتاج باستخدام فكرة النسبة للمتوسط.

الحل: لحل مثل هذه المسائل تتبع الخطوات التالية.

- نحدد مجموع مكونات الصفوف لمختلف سنوات الانتاج أي بجمع الانتاج في الربع الاول لكل سنة لمختلف السنوات الانتاجية.

- نجد المتوسط الموسمي من العلاقة

$$\text{المتوسط الموسمي} = \frac{\text{المجموع الموسمي لكل ربيع}}{\text{عدد السنوات}} \quad \dots\dots\dots (7-7)$$

$$\text{نجد} \quad \text{المتوسط الموسمي العام} = \frac{\text{مجموع المتوسطات الموسمية}}{\text{عدد الارباع}} \quad \dots\dots\dots (8-7)$$

- نجد النسبة الموسمية لكل حالة من العلاقة

$$\text{النسبة الموسمية} = \frac{\text{المتوسط الموسمي}}{\text{المتوسط الكلي}} \times 100\% \quad \dots\dots\dots (9-7)$$

والان نشكل جدول نلخص فيه كل ما نحصل عليه من حسابات في الخطوات السابقة كما في الجدول (7-13).

ربع السنة	المجموع الموسمي	المتوسط الموسمي	النسبة الموسمية
الربع الاول	72	14.4	87.27
الربع الثاني	81	16.2	98.18
الربع الثالث	90	18-	109.09
الربع الرابع	87	17.4	105.45
المتوسط العام	82.5	16.5	7400.00

جدول (7-13)

ويمكننا قراءة النسب المئوية المختلفة من العمود الاخير ونلاحظ ان مجموعها هو 400 وذلك بضرب 100 في عدد الفصول.

ولتخليص قيم الظاهرة من تأثير التغيرات الموسمية فاننا تتبع الخطوات التالية.

- نقسم القيم الاصلية على النسب الموسمية.

- بضرب ناتج القسمة في مئة (100).

ونحصل على القيم التالية لكل قيمة فمذ القيمة من الربع الاول لعام 1976 بعد

$$8.02 = 100 \times \frac{7}{87.27} \text{ تخليصها من التأثير الموسمي تصبح}$$

القيمة من الربع الثاني لعام 176 بعد تخليصها من التأثير الموسمي تصبح

$$9.17 = \frac{900}{98.18} = 100 \times \frac{9}{98.18}$$

وهكذا لباقي القيم في الجدول المذكور.

ج - التغيرات الجلمرية والعرضية.

يمكن الحصول على تأثير كل من التغيرات الدورية والعرضية وذلك من العلاقة  

$$ص = x - x \times د \times خ$$

وذلك بتخليص الظاهرة من تأثير كل من التغيرات الاتجاهية والتغيرات الموسمية معاً  
 ويمكن الحصول عليهما معاً من العلاقة.

(10-7).....

$$د \times خ = \frac{ص}{ت \times ف}$$

ونظراً لتداخلهما معا فيوجدنا بشكل قيمة واحدة.

## تمارين عامة على السلاسل الزمنية

س1: اذا كان لدينا قيم المشاهدات التالية: 9، 13، 18، 19، 12، 21، 10

تمثل سلسلة زمنية والمطلوب ايجاد.

(أ) المتوسطات المتحركة بطول 3.

(ب) المتوسطات المتحركة بطول 5.

(ج) المتوسطات المتحركة بطول 7.

(د) المتوسطات المتحركة بطول 4.

(هـ) المتوسطات المتحركة بطول 6.

(و) اوجد معامل الخشونة لهذه السلسلة

ص2- الجدول التالي يمثل عدد الطلاب في مدرسة ما خلال الاعوام 1978-1987

السنة	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
عدد الطلاب	540	630	650	690	720	740	790	840	900	950

والمطلوب :

- أ- رسم الشكل الانتشاري لهذه البيانات.
  - ب- اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة التمهيد باليد ثم اوجد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية
  - ج- اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة طريقة متوسط نصف السلسلة. ثم اوجد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.
  - د- احسب القيم الاتجاهية عن طريق اسلوب المتوسطات المتحركة وبطول 3 .
- ص3- الجدول التالي يمثل انتاج مصنع ما من الوحدات المنتجة مقلدة بالالف الوحدات خلال عشرة سنوات.

السنوات	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
عدد الوحدات المنتجة	7	13	19	21	27	28	32	35	39	40

والمطلوب .

- أ- رسم شكل الانتشار لهذه البيانات.
- ب- ايجاد معادلة الاتجاه العام بواسطة التمهيد باليد ثم ايجاد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.
- ج- اوجد معادلة الاتجاه العام بواسطة طريقة المربعات الصغرى ثم ايجاد القيم الاتجاهية للقيم الاصلية.
- د- اوجد معادلة الاتجاه العام باستخدام طريقة متوسط نصف السلسلة ثم اوجد القيم الاتجاهية لكل قيمة اصلية.

## الفصل الثامن

### الأرقام القياسية

#### 1-8 مقدمة:

لعل هذا الموضوع من اهم المواضيع التي تلعب دوراً هاماً في حياتنا اليومية حيث تربطنا في حياتنا اليومية بما سبق وبما سيكون لاحقاً وخاصة عند دراسة اسعار سابقة وربطها بالاسعار الحالية والمستقبلية لعدد من الاصناف وكذلك ايضا ربط كميات منتجة سابقا مع الانتاج الحالي والمستقبلي وهكذا دراسات اخرى. ولا نستطيع عمل دراسات من هذا النوع الا من خلال التعرف على ادوات ومقاييس لهذا الغرض تسمى بالأرقام القياسية وعليه فاننا بدأ سنعطي التعريف التالي حتى نستطيع توضيح هذا المفهوم.

— تعريف: الرقم القياسي هو اداة احصائية مصمم ليعين التغير في قيمة الظاهرة او مجموعة مرتبطة من الظواهر قيد الدراسة والتي لها علاقة بالنسبة لقيمتها في الزمن والمكان الجغرافي او أية خاصية اخرى.

وعندما نريد قياس التغير في قيمة الظاهرة فاننا ننسب قيمة الظاهرة في وقت معين الى قيمتها في وقت آخر او قيمتها في مكان جغرافي معين الى قيمتها في مكان جغرافي آخر. وقد تكون هناك زيادة او انخفاض في قيمة الظاهرة موضوع البحث.

فترة الاساس: هي الفترة الزمنية التي نقيس منها التغير في الظاهرة.

فترة المقارنة: هي الفترة الزمنية التي حصل خلالها تغير في الظاهرة اما اذا اردنا مقارنة التغير بين مكانين مختلفين فان المكان الذي نقيس منه التغير فيسمى مكان الاساس والمكان الذي حصل خلاله التغير يسمى مكان المقارنة .

## 8-2) استخدامات الأرقام القياسية.

يمكن استخدام الأرقام القياسية في كثير من مجالات الحياة وخاصة منها الاقتصادية ومنها.

- 1) مقارنة اسعار سلع مختلفة.
  - 2) مقارنة تكاليف المعيشة في مكان مع مكان آخر.
  - 4) يمكن التنبؤ بأحوال الاعمال والاقتصاد.
  - 5) مقارنة عدد العمال في سنة مع عددهم في سنة سابقة.
  - 6) مقارنة المستوى التعليمي في بلد ما وفي سنة ما مع مستواه في نفس البلد في سنة اخرى.
  - 7) مقارنة عدد السكان في بلد وفي سنة ما مع عدد السكان في سنة اخرى.
- وهناك الكثير الكثير من الاستعمالات للأرقام القياسية .

## 8-3) خصائص سنة الأساس؛

- 1) تحديد سنة الأساس بحيث لا تكون بعيدة عن سنة المقارنة.
- 2) ان تكون سنة الأساس ذات بنية من حيث موضع الرقم القياسي متشابهة مع ما هو عليه في سنة المقارنة.
- 3) ان تكون سنة الأساس ذات هدوء نسبي من انعكاساتها وداعياتها واثرها على الظاهرة قيد الدراسة.

## 8-4) انواع الأرقام القياسية:

- هناك عدة انواع من الأرقام القياسية نذكر منها.
- 1) الأرقام القياسية البسيطة.
- تعريف: الرقم القياسي البسيط وهو الرقم المتمثل من نسبه متغير واحد في فترة المقارنة على نفس المتغير في فترة اخرى هي فترة الأساس ومن هذه الأرقام.



أ) الرقم القياسي البسيط للسعر (منسوب السعر).

وهو النسبة المئوية لسعر سلعة معينة في سنة المقارنة والذي سنرمز له بالرمز س م الى سعرها في سنة الاساس والذي سنرمز له بالرمز س. وبصيغة رموز يمكن كتابته على النحو.

$$أ_س = \frac{س_م}{س_0} \times 100\% \text{ حيث } أ_س: \text{الرقم القياسي البسيط للاسعار}$$

مثال: اذا كان معدل سعر كيلو البنندورة في عام 1990 هو 25 قرشاً وفي عام 1995 كان 27 قرشاً أوجد الرقم القياسي البسيط لسعر البنندورة على اعتبار أن عام 1995 هو سنة الأساس.

$$\text{الحل: } أ_س = \frac{27}{25} \times 100\% = 108\% \text{ أي بزيادة قدرها } 8\% .$$

ب) الرقم القياسي البسيط للكميات (منسوب الكمية).

هو النسبة المئوية لكميات او حجوم سلعة معينة في فترة معينة والتي سنرمز لها بالرمز ك م الى كمياتها او حجوماتها في فترة والتي سنرمز لها بالرمز ك. وبصيغة رموز يمكن كتابتها على الصورة

$$أ_ك = \frac{ك_م}{ك_0} \times 100\%$$

ج) الرقم القياسي البسيط للقيمة (منسوب القيمة)

هو النسبة المئوية المئوية لقيمة سلعة معينة في فترة المقارنة والتي سنرمز لها بالرمز ق م الى قيمتها في سنة الاساس والتي سنرمز بالرمز ق=0 ك<sub>0</sub>×س<sub>0</sub> ويمكن صياغتها على النحو

$$أ_ق = \frac{ك_م \times س_م}{ك_0 \times س_0} \times 100\%$$

## 2) الأرقام القياسية التجميعية البسيطة:

وهي تقسم الى ثلاثة اصناف نذكر منها ما يلي:

(أ) الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار =  $100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \text{م.م.ر.}}{\sum_{i=1}^n \text{م.م.ر.}_0}$  ..... (4-8)

(ب) الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات =  $100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \text{ك.م.ر.}}{\sum_{i=1}^n \text{ك.م.ر.}_0}$  ..... (5-8)

(ج) الرقم القياسي التجميعي البسيط للقيمة =  $100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \text{ك.م.ر.م.ر.}}{\sum_{i=1}^n \text{ك.م.ر.م.ر.}_0}$  ..... (6-8)

## 3- الأرقام القياسية للأسعار والمرجحة بالكميات.

(أ) الرقم القياسي البسيط للأسعار والمرجح بكميات سنة الأساس (رقم لاسير للأسعار).

الرقم القياسي لاسير =  $100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \text{ك.م.ر.م.ر.}_0}{\sum_{i=1}^n \text{ك.م.ر.م.ر.}}$  ..... (7-8)

(ب) الرقم القياسي للأسعار والمرجح بكميات سنة المقارنة.

رقم باش للأسعار =  $100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \text{ك.م.ر.م.ر.}}{\sum_{i=1}^n \text{ك.م.ر.م.ر.}_0}$  ..... (8-8)

الرقم القياسي للأسعار والمرجح بالمتوسط الحسابي لكميات سنة الاسس والمقارنة

(9-8)....

$$\begin{aligned} \text{(ج) (رقم مارشال ابدجورت)} &= \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{K_i + P_i}{2} \right) \times M_i}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{K_i + P_i}{2} \right) \times M_i} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (K_i + P_i) M_i}{\sum_{i=1}^n (K_i + P_i) M_i} \end{aligned}$$

(5) الرقم القياسي التجميعي للأسعار والمرجح بالوسط الهندسي لكميات سنة الاسس وسنة المقارنة.

(10-8).....

$$100\% \times \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{K_i \times P_i} \times M_i}{\sum_{i=1}^n \sqrt{K_i \times P_i} \times M_i}$$

(6) رقم فيشر للأسعار = رقم لاسير × رقم باش وهو الرقم الأمثل

(11-8)...

$$100\% \times \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{K_i \times P_i} \times M_i}{\sum_{i=1}^n \sqrt{K_i \times P_i} \times M_i} \times \frac{\sum_{i=1}^n \sqrt{K_i \times P_i} \times M_i}{\sum_{i=1}^n \sqrt{K_i \times P_i} \times M_i}$$

(ب) الأرقام القياسية للكميات والمرجحة بالاسعار:

وهي نفس الأرقام السابقة ولكن بدلا من الترجيح بالكميات كما كان سابقا الان الكميات وترجح بالاسعار.

مثال: البيانات في جدول رقم (8-1) تبين اسعار(س.ر) بالدينار/طن وكميات (ك.ر) بالالف الاطنان لثلاثة اصناف من الخضروات المباعة في السوق المركزي في

عامي 1990، 1994.

1994		1990		الصنف
ك.ر	س.ر	ك.ر	س.ر	الصنف
80	350	160	250	بندورة
25	200	15	150	باذنجان
10	400	5	350	فلفل أخضر

جدول (8-1)

المطلوب إيجاد

- (1) الرقم القياسي البسيط لسعر صنف البندورة.
- (2) الرقم القياسي البسيط التجميعي للأسعار.
- (3) الرقم القياسي البسيط التجميعي للكميات.
- (4) رقم لاسبير للأسعار.
- (5) رقم باش للأسعار.
- (6) رقم مارشال - ايدجوراث للأسعار (المرجح بالوسط الحسابي)
- (7) الرقم القياسي للأسعار والمرجح بالوسط الهندسي.
- (8) الرقم القياسي الامثل ( رقم فيشر)

الحل : نكون جدول الحل (2-8).

الصفة	مهر	كهر	س م ر	ك م ر	س م ر	مهر ك م ر	س م ر	ك م ر	س م ر	ك م ر	س م ر
البنودرة	250	60	350	80	15000	21000	28000	20000	70	24500	17500
الباذنجان	150	15	200	25	2250	3000	5000	3750	20	4000	3000
الفلل الأخضر	350	5	400	10	1750	2000	4000	35000	7.5	3000	2625
المجموع	750	80	950	115	19000	26000	37000	272500		31500	23125

جدول (2-8)

$$(1) \text{ الرقم القياسي البسيط للبنودرة } = 100 \times \frac{350}{250} = 140\% \text{ أي زيادة مقدارها } 40\%.$$

$$(2) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار } = 100 \times \frac{950}{750} = 126.67\%$$

$$(3) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات } = 100 \times \frac{115}{80} = 143.75\%$$

$$(4) \text{ رقم لاسير } = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \text{م. ر. ك. م. ر.}}{\sum_{i=1}^n \text{م. ر. ك. م. ر.}} = 100 \times \frac{26000}{19000} = 136.84\%$$

$$(5) \text{ باش للأسعار } = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \text{م. ر. ك. م. ر.}}{\sum_{i=1}^n \text{م. ر. ك. م. ر.}} = 100 \times \frac{37000}{27250} = 135.77\%$$

$$(6) \text{ رقم مارشال ابدجورت } = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^n \text{م. ر. (ك. م. ر. ك. م. ر.)}}{\sum_{i=1}^n \frac{\text{م. ر. (ك. م. ر. ك. م. ر.)}}{2}} = 100 \times \frac{3150}{23125} = 136.22\%$$

(7) ثم نكون جدول (3-8) تابع

$\sqrt{\text{ك.ج.} \times \text{ك.ج.}}$	$\sqrt{\text{ك.ج.} \times \text{ك.ج.}}$	$\sqrt{\text{ك.ج.} \times \text{ك.ج.}}$
24248.0	17320.00	69.28
3872.0	2904.00	19.36
2828.0	2474.5	7.07
30948	22698.5	المجموع

جدول (3-8)

(7) الرقم القياسي للأسعار والمرجح بالوسط الهندسي

$$100 \times \frac{30948}{22698.5} = 100 \times \frac{\sum_{j=1}^n \sqrt{\text{ك.ج.} \times \text{ك.ج.}}}{\sum_{j=1}^n \sqrt{\text{ك.ج.} \times \text{ك.ج.}}} = 136.34\%$$

(8) الرقم القياسي الأمثل (فيشر) =  $\sqrt{\text{لاسير} \times \text{باش}}$

$$136.84 \times 135.77 = 185.77\%$$

مثال: البيانات في جدول (8-14) تمثل الكميات المباعة وأسعار مجموعة من الأصناف في سنتي 1975، 1979.

سنة 79		سنة 75		السنة
ك.ج.	س.م.	ك.ج.	س.م.	الصنف
50	105.4	24	59.2	أ
48	31.7	22	22	ب
49	10.3	27	2.8	ج
54	6.6	28	8.7	د

جدول (4-8)

المطلوب : إيجاد

- (1) الرقم القياسي للاسيير.
  - (2) الرقم القياسي لباش.
  - (3) الرقم القياسي لمارشال والمرجع بالوسط الحسابي.
  - (4) الرقم القياسي لمارشال والمرجع بالوسط الهندسي.
  - (5) الرقم القياسي لفيشر.
- الحل: تكوين جدول الحل (5-8).

السنه الصف	سنة 75		سنة 79		سم. ر. كم. ر	سم. ر. كم. ر	سم. ر. كم. ر
	كم. ر	سم. ر	كم. ر	سم. ر			
ب	22	22	31.7	48	1056	484	1521.6
ج	2.8	27	10.3	49	137.2	75.6	504.7
د	8.7	28	6.6	54	469.8	243.6	356.4
المجموع	-	-	-	-	4323	2080	7652.7

جدول (5-8)

تكون جدول (6-8) تابع

سم. ر. كم. ر	كم. ر + كم. ر	سم. ر (كم. ر + كم. ر)	كم. ر + كم. ر	سم. ر (كم. ر + كم. ر)	كم. ر + كم. ر	سم. ر (كم. ر + كم. ر)
2529.6	158.6	7930	3806.4	74.8818	3744.0887	1797.1626
697.4	53.7	2577.6	1181.4	26.40083	1267.5999	580.9833
278.1	13.1	641.9	353.7	5.3703	263.1441	144.9978
184.8	15.3	826.2	428.2	7.5776	409.903	212.1728
3689.9	240.7	11975.7	5769.9	114.238	5684.0231	2735.3164

جدول (6-8)

$$(1) \text{ الرقم القياسي للاسير} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{من } 0.00 \text{ ك.ج.}}{\sum_{i=1}^n \text{من } 0.00 \text{ ك.ج.}} \times 100\%$$

$$207.8365\% = 100\% \times \frac{4323}{2080}$$

أي زيادة مقدارها 107%

$$(2) \text{ الرقم القياسي لباش} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{من } 0.00 \text{ ك.ج.}}{\sum_{i=1}^n \text{من } 0.00 \text{ ك.ج.}} \times 100\%$$

$$207.3959\% = 100\% \times \frac{7652.7}{3689.9}$$

أي زيادة 107.3959%

$$(3) \text{ الرقم القياسي لمارشال} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{من } (0.00 + 0.00) \text{ ك.ج.}}{\sum_{i=1}^n \text{من } (0.00 + 0.00) \text{ ك.ج.}} \times 100\%$$

$$207.5547\% = 100\% \times \frac{11975.7}{5769.9}$$

أي زيادة 107.55%

$$(4) \text{ رقم قياسي مارشال} = \frac{\sum_{i=1}^n \text{من } 0.00 \text{ ك.ج.}}{\sum_{i=1}^n \text{من } 0.00 \text{ ك.ج.}} \times 100\%$$

$$207.8023\% = 100\% \times \frac{5684.0231}{2735.3164}$$

أي زيادة 107.8013%



(8) الرقم القياسي الامثل (فيشر)  $\sqrt{\text{الاسير} \times \text{باش}}$

$$\sqrt{207.9359 \times 207.8365}$$

$$\sqrt{43104.438} = 207.6161\%$$

أي بزيادة 107.6161%

مثال: البيانات التالية في جدول (7-8) تمثل الاسعار والكميات المباعة لعدة اصناف سنة 1975، 1979.

1979		1975		
سعر	كثير	كثير	سعر	الصنف
50	105.4	24	53.2	البندورة
48	37.7	22	22	الباذنجان
49	10.3	27	2.8	الفلفل
54	6.6	28	8.7	العنب
201	160	101	86.7	المجموع

جدول (7-8)

المطلوب: ايجاد الارقام القياسية المختلفة على اعتبار ان 1975 سنة اساس 1979 سنة مقارنة.

الحل: نكون جدول الحل رقم (8-2)

الصنف	كثير سعر	كثير سعر	كثير سعر	كثير سعر
البندورة	52.70	2529.6	2660	1276.8
الباذنجان	1809.6	829.4	1056	484
الفلفل	504.7	278.1	137.2	75.6
العنب	356.4	184.8	469.8	243.6
المجموع	3821.9	4323	2080	

جدول (8-8)

ثم نبدأ بتطبيق العلاقات الرياضية واستخدام الجداول

$$(1) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{P_j}{P_0}}{\sum_{j=1}^n 1} = \frac{201}{101} \times 100 = 199\%$$

$$(2) \text{ الرقم القياسي التجميعي البسيط للكميات} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{Q_0}}{\sum_{j=1}^n 1} = \frac{160}{86.7} \times 100 = 184.54\%$$

$$(3) \text{ رقم لاسبير للأسعار} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{P_j}{P_0} \times \frac{Q_j}{Q_0}}{\sum_{j=1}^n \frac{Q_j}{Q_0}} = \frac{432300}{2080} \times 100 = 207.84\%$$

$$(4) \text{ رقم باش للأسعار} = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{P_j}{P_0} \times \frac{Q_j}{Q_0}}{\sum_{j=1}^n \frac{P_j}{P_0}} = \frac{7940.7}{3821.9} \times 100 = 207.77\%$$

$$(5) \text{ رقم فيشر للأسعار} = \sqrt{207.77 \times 207.84} = 207.8\%$$

س.م $\sqrt{P_j \times Q_j}$	س.م $\sqrt{P_j \times Q_j}$	س.م $\sqrt{P_j \times Q_j}$	س.م $\frac{P_j + Q_j}{2}$	س.م $\frac{P_j + Q_j}{2}$
3744	1797.12	74.88	3960	1900.8
1382.4	633.6	28.8	1432.8	656.7
263.13	144.99	5.37	320.95	176.85
409.32	212.24	7.58	413.1	214.2
5798.85	2787.95		6126.85	2948.55

جدول (8-9)

$$(6) \text{ رقم مارشال - ايدجورت للاسعار} = \frac{\sum_{i=1}^n \left( \frac{K_i + K_0}{2} \right) \times \sum_{i=1}^n K_i}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{K_i + K_0}{2} \right) \times \sum_{i=1}^n K_0} \times 100\%$$

$$= 100\% \times \frac{6126.85}{2948.55} =$$

$$= 207.79\%$$

(7) رقم ايدجورت مارشال للوسط الهندسي للاسعار.

$$100\% \times \frac{5798.85}{2787.95} = 100\% \times \frac{\sqrt[n]{K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n}}{\sqrt[n]{K_0 \times K_0 \times \dots \times K_0}} =$$

$$= 208\%$$

مثال: هناك خطة لرفع مستوى معيشة الفرد بنسبة 150٪. لما كان عليه عام 1986

لكن يجب ان يكون دخل الاسرة التي تتقاضى 100 دينار كم يجب ان يكون

دخلها عام 1995؟

الحل: 150٪ - 100 = 50٪

$$\therefore 100 \times \frac{50}{100} = 50 \text{ دينار مقدار الزيادة}$$

الدخل الجديد = 100 + 50 = 150 دينار

(8-5) وهناك انواع اخرى من الأرقام القياسية وأهمها:-

(1) الرقم القياسي للانتاج الزراعي.

(2) الرقم القياسي للانتاج الصناعي.

(3) الرقم القياسي للبناء.

(4) الرقم القياسي الحالي.

(5) الرقم القياسي لتكاليف المعيشة وغيرها...

وقد قسمت ميزانية الأسرة في الاردن كما يلي:-

(1) المواد الغذائية (40.5%) وتشمل الحبوب واللحوم والفواكه

والخضروات، والالبان والكحول

والتبغ وسلع اخرى.

(2) الملابس والاحذية (8.15%)

(3) السكن (26.868%)

(4) السلع والخدمات الاخرى (24.482%)

100%

.....(8-12)

الرقم القياسي لسنة الاساس	10
القدرة الشرائية =	
الرقم القياسي لسنة المقارنة	الرقم القياسي للسنة المطلوبة

مقدار التضخم: الرقم القياسي لمستوى المعيشة لسنة المقارنة-

.....(8-13)

الرقم القياسي لمستوى المعيشة لسنة الاساس

مثال: اذا كان الجدول التالي يمثل مستوى المعيشة في بلد ما لسنوات مختلفة وفي

مرحلتين فاذا تغيرت سنة الاساس من 1985 الى 1992 فاجد:

أ) القدرة الشرائية في عام 1995

ب) اوجد مقدار التضخم الناشئ في جدول (8-10).

الارقام السلسلة الثانية	الارقام السلسلة الاولى	السنوات
57.2	100	1985
88.9	155.4	1990
100	174.8	1992
108.6	189.83	1995

جدول (8-10)

الحل:

$$\text{أ) القدرة الشرائية} = \frac{100}{189.83} = 0.5268$$

$$\text{ب) مقدار التضخم} = 100 - 189.83 = -89.83\%$$

.....(8-14) **مستوى التضخم = الرقم القياسي لتكاليف المعيشة - 100%**

\* القدرة الشرائية لوحدة النقد في سنة ما منسوبة اليه في سنة الاساس:-

.....(8-15) **القدرة الشرائية =  $\frac{\text{الرقم القياسي لسنة الاساس}}{\text{الرقم القياسي لسنة المقارنة}}$**

\* مثال: على اعتبار ان هناك خطة لرفع مستوى المعيشة بنسبة 150% كما كان عليه عام 1986، فكم يجب ان يكون دخل الاسرة التي تتقاضى راتب شهري (100) دينار في عام 1995.

$$\text{الدخل} = \text{مستوى المعيشة} \times \frac{150}{100} = 189.84 \times \frac{150}{100} = 284.36 \text{ دينار.}$$

مثال: في ما يلي جدول (8-11) بالأرقام القياسية لتكاليف المعيشة لبلد أ محسوبة لسنة الأساس 1960 فإذا عدلت سنة الأساس لتصبح 1962 فاحسب الرقم القياسي لباقي السنوات.

السنوات	الرقم القياسي للأساس 1960	1962
158	90	100
1959	80	
1960	120	
1961	140	
1962	150	
1963	160	
1964	140	
1965	1970	

جدول (8-11)

الحل: نبدأ بوضع رقم قياسي 100% مقابل سنة الأساس الجديدة ثم باستخدام النسبة والتناسب نحصل على باقي الأرقام القياسية الأخرى مثلاً لحساب الرقم القياسي الجديد العام 1961.

$$100 \leftarrow 150$$

$$س \leftarrow 140$$

$$س = \frac{100 \times 140}{150} = 93.33\% \text{ وهكذا نستمر لباقي القيم.}$$

$$\text{الرقم القياسي للقيمة ق} = س \times ك$$

$$ق = س \times ك$$

## 6-8 اختبار الأرقام القياسية

هناك مبدآن

(1) المبدأ الأول: اختبار الانعكاس في الزمن

$$\text{الرقم القياسي} \times \text{بديل الرقم القياسي بالزمن} = 1$$

(2) المبدأ الثاني : اختبار الانعكاس في المعامل

$$= \text{الرقم القياسي} \times \text{بديل الرقم القياسي بالمعامل} = \text{الرقم القياسي للقيمة.}$$

تعريف: بديل الرقم القياسي بالزمن هو الرقم القياسي بعد استبدال سنة الاساس بسنة المقارنة.

مثال: هل الرقم القياسي البسيط للأسعار يحقق اختبار الانعكاس بالزمن؟

$$\text{الرقم القياسي البسيط للأسعار} = \frac{P_t}{P_0} \times \frac{P_0}{P_t} = 1$$

∴ الرقم القياسي البسيط للأسعار يحقق الاختبار في الزمن.

تعريف: بديل الرقم القياسي بالمعامل هو الرقم القياسي بعد استبدال السعر بالكمية.

مثال: هل الرقم القياسي البسيط للأسعار يحقق اختبار الانعكاس في المعامل.

$$\text{الرقم القياسي البسيط للأسعار} = \frac{P_t}{P_0} \times \frac{Q_0}{Q_t} = \frac{P_t Q_0}{P_0 Q_t} = \frac{Q_t}{Q_0} = \text{الرقم القياسي للقيمة}$$

= الرقم القياسي للقيمة عليه فان الرقم القياسي البسيط يحقق اختبار الانعكاس في المعامل.

مثال: هل الرقم القياسي التجميعي للأسعار يحقق

(1) اختبار الانعكاس في الزمن

(2) اختبار الانعكاس في المعامل.

$$1 = \frac{1}{1} = \frac{\sum_{l=j}^n \sum_{r=1}^n}{\sum_{l=j}^n \sum_{r=1}^n} \times \frac{\sum_{l=j}^n \sum_{r=1}^n}{\sum_{l=j}^n \sum_{r=1}^n} = \text{الرقم القياسي التجميعي}$$

∴ تحقق الانعكاس في الزمن

أما لتحقيق الانعكاس في المعامل

$$\frac{\sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n}{\sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n} \neq \frac{\sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n}{\sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n}$$

∴ لا يحقق الانعكاس في المعامل.

مثال: هل رقم لاسبير يحقق

(1) الانعكاس بالزمن

(2) اختبار الانعكاس بالمعامل

$$1 \neq \frac{\sum_{l=j}^n \sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^n}{\sum_{l=j}^n \sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^n} \times \frac{\sum_{l=j}^n \sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^n}{\sum_{l=j}^n \sum_{r=1}^n \sum_{k=1}^n}$$

لا يحقق اختبار الانعكاس بالزمن.

مثال: هل رقم لاسبير يحقق اختبار الانعكاس بالمعامل



$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i} \neq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i} \times \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

∴ لا يحقق الانعكاس بالمعامل.

**مثال: هل رقم باش يحقق**

(1) اختبار الانعكاس بالزمن

(2) اختبار الانعكاس بالمعامل.

$$1 \neq \frac{\sum_{m \in M} \sum_{k \in M} \mu_{mk}}{\sum_{m \in M} \sum_{k \in M} \mu_{mk}} \times \frac{\sum_{m \in M} \sum_{k \in M} \mu_{mk}}{\sum_{m \in M} \sum_{k \in M} \mu_{mk}} \quad (1) \text{ الحل:}$$

لا يحقق اختبار الانعكاس بالزمن .

بالمعامل.

$$\frac{\sum (C_r)}{\sum C_r} \neq \frac{\sum M_r}{\sum M_r} \times \frac{\sum R_r}{\sum R_r}$$

∴ لا يحقق اختبار الانعكاس بالمعامل

**ملاحظة:** عند اختبار الانعكاس بالزمن فاننا

فستبدل م ← 0

 $\rho \leftarrow 0$ 

وعند الاختبار بالمعامل فإننا نقوم باستبدال

س ← ك

كـ

مثال: هل رقم فيشر القياسي يحقق (1) الانعكاس بالزمن.  
(2) الانعكاس بالمعامل.

الحل: (1) بالنسبة للانعكاس بالزمن:

$$\frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \times \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \sqrt{\frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \times \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}} \\ - \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \times \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \times \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \times \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \sqrt{\frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \times \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}}$$

∴ يحقق الانعكاس في الزمن 1 = 1

(2) واختبار الرقم القياسي الانعكاس في المعامل نستبدل:

ك ← س

س ← ك

$$\frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \times \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \sqrt{\frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \times \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}} \\ - \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \times \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \times \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \times \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \sqrt{\frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \times \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}} \\ - \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} = \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} = \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \sqrt{\frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m} \times \frac{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}{\sum_{r=0}^m \sum_{k=0}^m}}$$

∴ يحقق اختبار الانعكاس بالمعامل.

مثال: هل مارشال- ايدجورت يحقق اختبار الانعكاس بالزمن

$$I = \frac{\sum_{r=0}^m (K_r + K_m) \sum_{r=0}^m (K_r + K_m)}{\sum_{r=0}^m (K_r + K_m) \sum_{r=0}^m (K_r + K_m)} = \text{رقم مارشال- ايدجورت}$$

وهذا يعني ان رقم مارشال يحقق الانعكاس بالزمن.

مثال: هل مارشال - ايدجورت يحقق اختبار الانعكاس بالمعامل.

$$\text{الحل: } \frac{\sum_{r=0}^m (K_r + K_m) \sum_{r=0}^m (K_r + K_m)}{\sum_{r=0}^m (K_r + K_m) \sum_{r=0}^m (K_r + K_m)} \neq \frac{\sum_{r=0}^m (K_r + K_m) \sum_{r=0}^m (K_r + K_m)}{\sum_{r=0}^m (K_r + K_m) \sum_{r=0}^m (K_r + K_m)}$$

لا يحقق اختبار الانعكاس بالمعامل.

مثال: هل الرقم القياسي المرجح بالوسط الهندسي يحقق الانعكاس بالزمن

$$I = \frac{\sum_{r=0}^m (K_r + K_m) \sum_{r=0}^m (K_r + K_m)}{\sum_{r=0}^m (K_r + K_m) \sum_{r=0}^m (K_r + K_m)} = \text{الرقم القياسي المرجح بالوسط الهندسي}$$

∴ الرقم القياسي المرجح بالوسط الهندسي يحقق الانعكاس بالزمن

مثال: هل الرقم القياسي المرجح بالوسط الهندسي يحقق الانعكاس بالمعامل

$$\text{الرقم القياسي} = \frac{\sum_{r=0}^m (K_r + K_m) \sum_{r=0}^m (K_r + K_m)}{\sum_{r=0}^m (K_r + K_m) \sum_{r=0}^m (K_r + K_m)} \neq \frac{\sum_{r=0}^m (K_r + K_m) \sum_{r=0}^m (K_r + K_m)}{\sum_{r=0}^m (K_r + K_m) \sum_{r=0}^m (K_r + K_m)}$$

لا يحقق الانعكاس بالمعامل.

الانعكاس بالمعامل س ← ك بالزمن م ← 0

وهذا ملخص للاختبارات لجميع الارقام القياسية ونتيجة كل اختبار

\* اختبار الانعكاس في المعامل كما هو موضح في جدول (8-12)

البيان	البديل بالمعامل	الاختبار	النتيجة
(1) $\frac{م}{ه} \times 100\%$	$\frac{م}{ه}$	$\frac{م \times م}{ه \times ه} = ق$	اجتاز
(2) $\frac{م}{ه} \times 100\%$	$\frac{م}{ه}$	$ق =$	اجتاز
(3) $\frac{\sum م}{\sum ه}$	$\frac{\sum م}{\sum ه}$	يحقق	لم يجتاز
(4) $\frac{\sum م \text{ ر } م}{\sum ه \text{ ر } ه}$	$\frac{\sum م \text{ ر } م}{\sum ه \text{ ر } ه}$	يحقق	لم يجتاز
(5) $\frac{\sum م \text{ ر } ه}{\sum ه \text{ ر } ه}$	$\frac{\sum م \text{ ر } ه}{\sum ه \text{ ر } ه}$	يحقق	لم يجتاز
(6) $\frac{\sum م (ه + م)}{\sum ه (ه + م)}$	$\frac{\sum م (ه + م)}{\sum ه (ه + م)}$	يحقق	لم يجتاز
(7) $\frac{\sum م \sqrt{ه \times م}}{\sum ه \sqrt{ه \times م}}$	$\frac{\sum م \sqrt{ه \times م}}{\sum ه \sqrt{ه \times م}}$	يحقق	لم يجتاز
(8) $\frac{\sum م \text{ ر } ه}{\sum ه \text{ ر } ه} \times \frac{\sum م \text{ ر } م}{\sum ه \text{ ر } م}$	$\frac{\sum م \text{ ر } ه}{\sum ه \text{ ر } ه} \times \frac{\sum م \text{ ر } م}{\sum ه \text{ ر } م}$	$ق =$	اجتاز

جدول (8-12)

اما اذا كان: الرقم القياسي  $\times$  بديل الرقم القياسي في المعامل = الرقم القياسي للقيمة  
فاننا نقول بانه اجتاز اختبار الانعكاس في المعامل.

\* اختبار الانعكاس في الزمن كما هو موضح في جدول (8-13)

البيان	البديل بالزمن	الاختبار	النتيجة
(1) $\frac{\text{م}}{\text{م}} \times 100\%$	$\frac{\text{م}}{\text{م}}$	1=	اجتاز
(2) $\frac{\text{ك}}{\text{ك}} \times 100\%$	$\frac{\text{ك}}{\text{ك}}$	1=	اجتاز
(3) $\frac{\sum \text{م}}{\sum \text{م}}$	$\frac{\sum \text{م}}{\sum \text{م}}$	1=	اجتاز
(4) $\frac{\sum \text{م} \cdot \text{ك}}{\sum \text{م} \cdot \text{ك}}$	$\frac{\sum \text{م} \cdot \text{ك}}{\sum \text{م} \cdot \text{ك}}$	1≠	لم يجتاز
(5) $\frac{\sum \text{م} \cdot \text{ك}}{\sum \text{م} \cdot \text{ك}}$	$\frac{\sum \text{م} \cdot \text{ك}}{\sum \text{م} \cdot \text{ك}}$	1≠	لم يجتاز
(6) $\frac{\sum \text{م} (\text{ك} + \text{ر})}{\sum \text{م} (\text{ك} + \text{ر})}$	$\frac{\sum \text{م} (\text{ك} + \text{ر})}{\sum \text{م} (\text{ك} + \text{ر})}$	1=	اجتاز
(7) $\frac{\sum \text{م} \sqrt{\text{ك}}}{\sum \text{م} \sqrt{\text{ك}}}$	$\frac{\sum \text{م} \sqrt{\text{ك}}}{\sum \text{م} \sqrt{\text{ك}}}$	1=	لم يجتاز
(8) $\frac{\sum \text{م} \cdot \text{ك} \cdot \text{ر}}{\sum \text{م} \cdot \text{ك} \cdot \text{ر}}$	$\frac{\sum \text{م} \cdot \text{ك} \cdot \text{ر}}{\sum \text{م} \cdot \text{ك} \cdot \text{ر}}$	1=	اجتاز

جدول (8-13)



## الفصل التاسع

### الاحصاءات الحيوية

#### 9-1) تعريف الاحصاء السكاني:

( الاحصاء السكاني هو الدراسة الاحصائية للسكان وخصائصهم وفعاليتهم وتغيراتهم من حيث التكاثر والوفاة والانتقال والعوامل التي تؤثر فيها والنتائج التي تنشأ عنها )

#### 9-2) اهمية الاحصاء السكاني:

قبل الدخول في شرح اهمية الاحصاء السكاني لابد من تعريف السكان وهم مجموعة من الناس تعيش ضمن حدود بلد معين سواء كانوا يعيشون بصفة دائمة او مؤقتة.

وتتبع اهمية الاحصاء السكاني من انه يقوم بدراسة السكان وجميع البيانات المختلفة عنهم وهذه البيانات تعتبر مهمة جدا وخاصة بالنسبة لصانعي القرار والعمليات التخطيطية فالقرار الناجح هو القرار الذي يعتمد على معلومات دقيقة ونلاحظ بأن السكان هم مصدر النشاطات الاقتصادية والثقافية والصحية والاجتماعية وغيرها وهذه النشاطات مترابطة ويؤثر بعضها في بعض.

ويمكن الحصول على البيانات السكانية من مصدرين.

أ- التعداد السكاني: وهي عملية حصر الافراد في مكان محدد في لحظة معينة بهدف جمع البيانات التي تصف افراد المجتمع وهناك نوعان من التعداد:

1- التعداد النظري: وهو حصر الفرد في المكان الذي تعود ان يقيم فيه الشخص بشكل دائم بغض النظر عن مكان وجوده الفعلي لحظة التعداد.

2- التعداد الفعلي: حصر الاشخاص في مكان وجودهم لحظة التعداد حتى ولو كان

زائرا (تعداد واقعي).

وكان آخر تعداد للسكان هو في الاردن سنة 1976 ومن اهدافه تكوين خامات للدراسة والبحوث.

### 9-3) انواع البيانات التي يتم حصرها:

- 1) بيانات عن خصائص الافراد كالعمر، الجنس، والديانة.
  - 2) بيانات عن تكوين الاسرة كالعدد والسكن.
  - 3) بيانات عن الخصوبة مثل عدد المواليد للنساء المتزوجات والارامل.
- كيفية جمع البيانات:

- 1) تحديد الهدف.
- 2) وضع الوحدات الادارية على الخرائط ثم تحديد لها على الارض.
- 3) تحديد اجزاء الوحدات الادارية الى قرية وقضاء.
- 4) ترقيم الطرق والالوية.
- 5) حصر المكان.
- 6) تقييم البيانات: وذلك عن طريق اضافة المواليد والضيوف الى البيانات في ليلة التعداد، وطرح الوفيات والغائبين في ليلة التعداد حتى نحصل على ارقام مطابقة للارقام في ليلة التعداد.

### 9-4) التحرك السكاني

والتحرك السكاني يحتوي على نوعين من التحركات هما التحرك الداخلي (الهجرة الداخلية) والتحرك الخارجي ويسمى بالهجرة الخارجية.

#### 1- الهجرة الداخلية

وهي انتقال السكان من المناطق الريفية الزراعية الى المدن حيث توجد فيها المصانع وهذا يتم في داخل البلد الواحد والدوافع للهجرة هي ما يلي:-



- الدوافع المادية كتنقص في الموارد المحلية وضيق العيش مما يدفع عدد من السكان الى الانتقال الى حيث توجد الثروات الطبيعية وفرص العمل الجيدة والمغرية مما يؤدي الى رفع مستوى المعيشة وغالبا ما تكون هذه الاقاليم اكثر انتعاشا ورواجا مما يساعد السكان المهاجرين اليها في مما رسة اعمالهم التجارية ومزاولة المهن الحرة والحصول على اجور مرتفعة.

- الكثافة السكانية ويقصد بها ارتفاع عدد السكان في بعض الاقاليم نتيجة لعوامل اقتصادية او اجتماعية او ثقافية ففي هذه الحالة اما تلجأ الدولة الى توزيع السكان الى أقاليم اخرى اقل كثافة او ان يلجأ الافراد الى الهجرة الى اقاليم اخرى لتحسين ظروف معيشتهم.

- المناخ المختلف في الاقاليم المختلفة داخل البلد الواحد حيث ان معظم الناس يفضل الانتقال الى الاماكن ذات الطقس المعتدل.

- بعض الاقاليم داخل البلد الواحد تعتبر اكثر تطورا من غيرها بوجود المرافق العامة المتطورة والخدمات المتطورة مما يؤدي الى انتقال السكان الى هذه الاقاليم للاستفادة من الامتيازات الموجودة فيها.

اما الهجرة الداخلية فلا تأثر لها على عدد السكان.

## 2- الهجرة الخارجية

وهي انتقال السكان من بلد الى اخر ودوافع هذا النوع من الهجرة ما يلي:-

- دوافع اقتصادية - دوافع سياسية - طلبا للعلم

وهذا النوع من الهجرة توجد له اثاره على كل من البلد المرسل للمهاجرين والبلد المستقبل للمهاجرين ومن هذه الآثار مايلي:-

(1) نقص عدد السكان في البلد المرسل وزيادته في البلد المستقبل.

(2) تركيبة السكان من حيث العمر والجنس والمهنة في كل من البلد المرسل والبلد المستقبل.

ب- المصدر الثاني للبيانات السكانية هو الإحصاءات الحيوية

## 5-9) الاحصاءات الحيوية:

(وهي المتعلقة بمجموع الاحداث والحوادث التي تصيب الانسان منذ ولادته حتى وفاته). والاحصاءات الحيوية في اغلب الاحيان تتوفر لدى دوائر حكومية حيث تقوم الدولة بتنظيم عملية تقديم البيانات في مكاتب معينة وفي فترة زمنية محددة اجباريا. وسنقوم بشرح بعض عناصر الاحصاءات الحيوية ومنها ما يلي:

### 1) الخصوبة (2) الوفيات

**تعريف الخصوبة:** هي القدرة الواقعية للمرأة على الانجاب وتقدر بعدد الاطفال الذين تنجبهم بين 15-49 سنة.

**عوامل الخصوبة:** والخصوبة ترتبط بعدة عوامل منها مايلي:-

أ- الحروب وتؤدي الى تأجيل الزواج ووجود الامراض وسوء التغذية وغلاء المعيشة وارتفاع الاجور وكل ذلك يؤدي الى:

1- النقص في معدلات المواليد.

2- ارتفاع معدل المواليد بعد الحرب.

3- نسبة المواليد الذكور اعلى من الاناث.

ب- الوبئة والامراض والجماعات. حيث ان 30٪ فأكثر من معدل الوفاة يكون نتيجة سوء التغذية.

ج- درجة التطور الحضاري والتناسب العكسي مع الخصوبة.

د- العوامل الاجتماعية والاقتصادية كالمعتقدات وظروف المعيشة والام العاملة.

## 6-9) مقاييس الخصوبة:

ونقسم الى مجموعتين رئيسيتين:

ب - مقاييس النمو السكاني

أ- معدلات ونسب المواليد

أ - معدلات ونسب المواليد:

وتحتوي على المعدلات التالية:

$$(1) \text{ معدل المواليد الخام} = \frac{\text{عدد المواليد احياء خلال السنة}}{\text{عدد السكان في نصف سنة}} \times 100$$

.....(1-9)

مثال: اذا كان عدد المواليد احياء خلال عام 1985 في احدى المحافظات (30000) وعدد السكان في هذه المحافظات (400000) فأوجد معدل المواليد الخام لكل 1000 نسمة من السكان.

$$\text{معدل المواليد الخام} = \frac{30000}{400000} \times 1000 = 75 \text{ بالآلف}$$

$$(2) \text{ معدل الخصوبة العام} = \frac{\text{عدد المواليد احياء خلال السنة}}{\text{عدد الاناث في سن الحمل في منتصف السنة}} \times 100$$

.....(2-9)

مثال: اذا كان عدد المواليد احياء خلال السنة 80000 في احدى البلدان وكان عدد الاناث في سن الحمل في منتصف السنة يساوي 900000 فأوجد معدل الخصوبة العام

$$\text{معدل الخصوبة العام} = \frac{80000}{900000} \times 1000 = 88.9 \text{ بالآلف}$$

$$(3) \text{ معدل الخصوبة للنساء المتزوجات} = \frac{\text{عدد المواليد احياء خلال السنة}}{\text{عدد النساء المتزوجات والأرامل والمطلقات في منتصف نفس السنة}} \times 1000$$

.....(3-9)

مثال: اذا كان عدد المواليد احياء خلال السنة 100000 في احدى البلدان وكان عدد النساء المتزوجات والأرامل والمطلقات في منتصف نفس السنة يساوي

1500000 فأوجد معدل الخصوبة للنساء المتزوجات.

$$\text{معدل الخصوبة للنساء المتزوجات} = \frac{100000}{1500000} \times 1000 = 66.7 \text{ بالآلف}$$

(4) معدل الخصوبة حسب فئات العمر =  $\frac{\text{عدد المواليد الأحياء لفئة من معينة}}{1000 \times \text{عدد الإناث في نفس فئة السن في منتصف السنة}}$  ... (4-9)

مثال: إذا كان عدد المواليد الأحياء 200000 والتي أنجبتهما 2000000 سيدة في فئة السن 20 - 25 سنة في إحدى البلدان فأوجد معدل الخصوبة حسب فئة السن 20 - 25

$$\text{معدل الخصوبة حسب فئة السن 20 - 25} = \frac{200000}{2000000} \times 1000 = 100 \text{ بالآلف}$$

(5) الخصوبة الكلية (النظرية) =  $\frac{\text{المواليد الأحياء}}{1000 \times \text{عدد الإناث في سن الانجاب}}$  ..... (5-9)

مثال: إذا كان عدد المواليد أحياء في بلد ما (300000) وعدد الإناث في سن الانجاب 3.000.000 فأوجد معدل الخصوبة الكلية

$$\text{الخصوبة الكلية} = \frac{300000}{3000.000} \times 1000 = 100 \text{ بالآلف}$$

### 9-7 مقاييس النمو السكاني

ان التغير في عدد السكان ينتج عن الزيادة الطبيعية وهي الفرق بين المواليد وعدد الوفيات بالإضافة الى صافي الهجرة الذي يشكل الفرق بين اعداد المهاجرين الى البلد والمهاجرين منه ومن مقاييس النمو السكاني:

$$\text{معدل الزيادة الطبيعية} = \frac{\text{عدد المواليد الأحياء} - \text{عدد الوفيات}}{\text{اجمالي عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000 \quad \text{.....(9-6)}$$

مثال: اذا كان عدد المواليد احياء في احدى البلدان 300000 وكان عدد السكان في منتصف السنة 10.000.000 وعدد الوفيات 100000 فالمتطلب استخراج معدل الزيادة الطبيعية لهذا البلد.

$$\begin{aligned} \text{معدل الزيادة الطبيعية} &= 1000 \times \frac{100000 - 300000}{10000000} \\ &= 1000 \times \frac{200000}{10000000} = 20 \text{ بالآلف} \end{aligned}$$

#### (9-8) التقديرات السكانية وايجادها بطريق نظام المتوالية العددية :

والافتراض في هذا النظام ان السكان يتزايدون او يتناقصون بمقدار عددي ثابت من سنة لاخرى في الفترة الفاصلة بين تعدادين للسكان. ولتقدير عدد السكان فاننا نستخدم الصيغة التالية:-

.....(9-7)

$$C = 1 + (n-1)z$$

حيث ان C = التعداد اللاحق ع1 = التعداد الاول

ت = عدد السنوات بضمنها سنة التعداد الاول

ز = المقدار الثابت للزيادة السكانية (اساس المتوالية العددية)

مثال: اذا كان عدد سكان بلد ما عام 1960، 1970 على التتابع 3 ملايين، 3.8 مليون المطلوب تقدير حجم السكان عام 1980 باتباع نظام المتوالية العددية.

الحل: نحسب اولاً كمية الزيادة السنوية الثابتة (ز)

$$3.8 = 3 + (11-1)z$$

$$3.8 = 3 + 10z$$

$$3.8 = 3 + 10z$$

$$0.8 = 10z$$

$$z = \frac{0.8}{10} = 0.08$$

والان نقدر عدد السكان عام 1980

$$80 = 3 + (21-1) \times 0.08$$

$$80 = 3 + 20 \times 0.08$$

$$80 = 3 + 1.6 = 4.6 \text{ مليون}$$

### 9-9) مقاييس الوفيات

يوجد عدة عوامل تؤثر على الوفيات اهمها:

1- الحروب ومضاعفاتها الصعبة

2- المجاعات والامراض المعدية ترفع اعداد الوفيات

3- التقدم الحضاري والصحي يخفض معدل الوفيات ومن اهم معدلات الوفيات ما يلي:-

<p>أ- معدل الوفيات الخام = <math>\frac{\text{اجمالي عدد الوفيات عند المواليد المتوى}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000</math></p> <p>... (9-8)</p>
---

مثال: اذا كان عدد الوفيات عند المواليد متوى 100000 وكان عدد السكان في

منتصف العام 8.000.000 فاحسب معدل الوفيات الخام بالالاف.

$$\text{معدل الوفيات الخام} = \frac{100000}{8000000} \times 1000 = 12.5 \text{ بالآلف}$$

عدد وفيات النساء أثناء الحمل والولادة

(ب) معدل وفيات الأمومة =  $\frac{\text{عدد السكان في منتصف السنة}}{1000} \times \dots (9-9)$

مثال: إذا كان عدد المواليد الأحياء في محافظة ما 250000 وعدد وفيات النساء أثناء الحمل والولادة 2000 فاحسب معدل وفيات الأمومة.

$$\text{معدل وفيات الأمومة} = \frac{2000}{250000} \times 1000 = 8 \text{ بالآلف}$$

عدد وفيات الأطفال الرضع

(ج) معدل وفيات الأطفال الرضع لائق من سنة =  $\frac{\text{عدد المواليد الأحياء}}{1000} \times \dots (10-9)$

مثال: إذا كان عدد وفيات الأطفال الرضع (الأقل من سنة) 5000 وكان عدد المواليد الأحياء 250000 حسب معدل وفيات الأطفال الرضع

$$\text{معدل وفيات الأطفال الرضع} = \frac{5000}{250000} \times 1000 = 20 \text{ بالآلف}$$

عدد الوفيات لعمر أقل من 28 يوم

(د) معدل وفيات الأطفال حديثي الولادة (أقل من شهر) =  $\frac{\text{عدد المواليد الأحياء}}{1000} \times \dots (11-9)$

مثال: إذا كان عدد الأطفال المتوفين من أعمار 28 يوما فأقل يساوي وعدد المواليد أحياء 250000 فاحسب معدل وفيات الأطفال حديث الولادة.

$$\text{معدل وفيات الاطفال حديثي الولادة} = \frac{150}{250000} \times 1000 = 0.6 \text{ بالآلف}$$

عدد الوفيات ( من 28 يوم الى 11 شهر معدل وفيات الطفولة المبكرة = $1000 \times \frac{\text{عدد المواليد الأحياء} - \text{عدد الوفيات قبل من 28 يوم}}{\text{عدد المواليد الأحياء}}$ ... (9-12)
---

مثال: اذا كان عدد وفيات الاطفال في سن مبكرة (28 يوما الى 11 شهرا) 2500 وعدد المواليد احياء 230470 وعدد الوفيات في السن الاقل من 28 يوما 470 وفاة احسب معدل وفيات الطفولة المبكرة.

معدل وفيات الطفولة المبكرة -

$$11 \approx 10.9 = \frac{2500000}{2300000} = 1000 \times \frac{2500}{470 - 230470} =$$



## الفصل العاشر

### نظرية الاحتمالات

#### 10-1 مقدمة:

تبحث نظرية الاحتمالات في الحوادث التي نتائجها غير مؤكدة بل عشوائية وهنا نعطي التعريف التالي.

تعريف: العشوائية هي التجربة التي نتائجها ترتبط بالصدفة وكذلك غير مؤكدة النتائج.

ومن المفيد ايضا وحتى نستطيع فهم نظرية الاحتمالات بشكلها الجيد لابد من تقديم التعريفات التالية والتركيز على مزيد من الامثلة.

تعريف : الفضاء العيني لتجربة ما هو مجموعة جميع النتائج المتوقعة من هذه التجربة وسنرمز لها بالرمز  $\Omega$ .

تعريف: الحدث هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني وسنرمز له بأي حرف من الحروف الابجدية.

وهناك عدة انواع من الاحداث نقدم تعريفاتها.

تعريف: الحدث البسيط هو الحدث الذي تحتوي مجموعه على عنصر واحد من عناصر الفضاء العيني.

تعريف: الحدث المركب هو الحدث الذي تحتوي مجموعه على اكثر من عنصر من عناصر الفضاء العيني.

تعريف: الحدث المؤكد هو الحدث الذي تحتوي مجموعه على جميع عناصر الفضاء العيني.

تعريف: الحدث المستحيل هو الحدث الذي يستحيل وقوعه ومجموعته لا تحتوي على عناصر من عناصر الفضاء العيني.

بعد تناولنا لهذه التعريفات نورد الامثلة التالية.

مثال: في تجربة القاء حجر نرد مرة واحد

(1) اكتب الفضاء العيني لهذه التجربة.

(2) الحدث أ الذي يمثل ظهور عدد اولي ثم اذكر نوع الحدث.

(3) الحدث ب الذي يمثل ظهور عدد اولي ثم اذكر نوع هذا الحدث

(4) الحدث جـ الذي يمثل ظهور العدد على الوجه العلوي لحجر النرد واذكر نوع الحدث.

(5) الحدث د الذي يمثل ظهور عدد اقل من او يساوي 6 على الوجه العلوي واذكر نوعه.

(6) الحدث هـ الذي يمثل ظهور العدد 7 على الوجه العلوي لحجر النرد واذكر نوع الحدث.

الحل: (1) الفضاء العيني للتجربة  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) الحدث أ =  $\{2, 4, 6\}$  وهذا حدث مركب لاحتواء مجموعته على اكثر من عنصر.

(3) الحدث ب =  $\{2, 3, 5\}$  وهذا حدث بسيط لاحتواء مجموعته على عنصر واحد.

(4) الحدث جـ =  $\{1\}$  وهذا حدث بسيط لاحتواء مجموعته على عنصر واحد.

(5) الحدث د =  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  وهذا حدث مؤكد لاحتواء مجموعته على عناصر الفضاء العيني.

(6) الحدث هـ =  $\{\emptyset\}$  وهذا حدث مستحيل لعدم احتواء مجموعته على عناصر

مثال: في تجربة القاء قطعة نقود مرتين متتاليتين اكتب مايلي.

(1) الفضاء العيني لهذه التجربة.

(2) الحدث الذي يمثل ظهور وجهتين متشابهين على الوجهين الظاهرين.

(3) الحدث الذي يمثل ظهور كتابة واحدة على احد الوجهين الظاهرين.

(4) الحدث الذي يمثل ظهور صورة واحدة على الاقل

(5) الحدث الذي يمثل ظهور صورتين على الاكثر.

الحل: (1)  $\Omega = \{ص، ص، ك، ك، ص، ك\}$  حيث  $ص$  يمثل ظهور صورة ،  $ك$  يمثل ظهور كتابة.

(2)  $A = \{ص، ص، ك\}$  يعني ظهور صورتين او كتابتين.

(3)  $B = \{ص، ك، ك، ص\}$

(4)  $C = \{ص، ك، ك، ص، ص\}$

(5)  $D = \{ك، ك، ك، ص، ص، ص\} = \Omega$

مثال: صندوق به 8 مفاتيح كان 5 منها سليم يحب مصباحان على التوالي دون ارجاع او جـ ما يلي

(1) عدد عناصر الفضاء العيني لهذه التجربة.

(2) عدد عناصر الحدث أ الذي يمثل ظهور اثنتين سليميتين.

(3) عدد عناصر الحدث ب الذي يمثل ظهور اثنتين تالفتين.

(4) عدد عناصر الحدث جـ الذي يمثل ظهور احدهما سليم والاخرى تالفة.

الحل:

(1) عدد عناصر الفضاء العيني  $= \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 28$  حيث ان عدد

اللامبات = 8 ويراد اختيار اثنتين منها.

(2) عدد عناصر الحدث أ  $= \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$  حيث ان عدد المصاييح السليمة هو 5

ويراد اختيار اثنتين منها.

(3) عدد عناصر الحدث ب  $= \binom{3}{2} = \frac{3 \times 2}{2 \times 1} = 3$  حيث ان عدد المصاييح التالفة 3 ويراد

اختيار اثنتين منها.

(4) عدد عناصر الحدث جـ  $= \binom{3}{1} \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15$  حيث ان عدد المصاييح السليمة

خمسة ويراد اختيار احدهما وكذلك المصاييح التالفة ثلاثة ويراد اختيار احدهما.

مثال: كيس به ثمانية كرات مرقمة من 1 الى 8 اوجد مايلي.

- (1) عدد عناصر الحدث أ الذي يمثل سحب ثلاث كرات في آن واحد دون ارجاع.
- (2) عدد عناصر الحدث ب الذي يمثل سحب ثلاثة كرات على التتابع دون ارجاع.
- (3) عدد عناصر الحدث ج الذي يمثل سحب ثلاثة كرات مع الارجاع.

الحل: (1) عدد عناصر الحدث أ =  $\binom{8}{3} = \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} = 56$

(2) عدد عناصر الحدث ب =  $8 \times 7 \times 6 = 336$  حيث ان اختيار المرة الاولى يتم بثمانية طرق مختلفة ولان السحب دون اعادة فليسحب الكرة الثانية يمكن ان يتم بسبعة طرق مختلفة لانه تبقى في الكيس سبعة كرات اما السحب الكرة الثالثة فيتم ذلك بستة طرق وهكذا.

(3) عدد عناصر الحدث ج =  $8 \times 8 \times 8 = 512$  لان السحب مع الاعداد.

تعريف: نسمي الحدثان أ، ب من الفضاء العيني  $\Omega$  بأنهما حدثان منفصلان اذا كان  $A \cap B = \emptyset$ . أي لا يوجد عناصر مشتركة بين الحدثين.

مثال: في تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة اذا كان الحدث أ يمثل ظهور عدد زوجي، والحدث ب يمثل ظهور عدد فردي على الوجه العلوي فهل الحدثان أ، ب حدثان منفصلان؟

الحل: نكتب عناصر الحدث أ =  $\{2, 4, 6\}$ .

عناصر الحدث ب =  $\{1, 3, 5\}$ .

∴ أ ∩ ب = ∅ فان الحدثان أ، ب منفصلان.

## 10-2) نظريات في الاحتمالات

نظرية : اذا كان  $A \subset \Omega$  فان

(1)  $0 \leq P(A) \leq 1$

(2)  $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

(3)  $P(\emptyset) = 0$ .

$$(4) \quad C(A \cup B) = C(A) + C(B) - C(A \cap B)$$

$$(5) \quad A \cap B \leftarrow \emptyset \Leftarrow C(A \cup B) = C(A) + C(B).$$

$$(6) \quad C(\bar{A} - B) = C(\bar{A}) - C(A \cap B) = C(\bar{A} \cap \bar{B})$$

$$(7) \quad C(B - \bar{A}) = C(B) - C(A \cap B) = C(\bar{A} \cap B)$$

وهنا بعض الخصائص في الاحتمالات نورد اهمها

(1) اذا كانت الاحداث  $A_1, A_2, A_3, \dots$  كل اثنين فيهما احداثا منفصلة فاذا كان

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

$$C(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) = C(A_1) + C(A_2) + C(A_3) + \dots + C(A_n) = C(\Omega) = 1$$

(2) اذا كان  $A \supset B \Leftarrow C(A) \geq C(B).$

(3)  $C(\bar{A}) = 1 - C(A)$  حيث  $\bar{A}$  هي متمم الحدث  $A$  بالنسبة لـ  $\Omega$ .

مثال : اذا كان  $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  والدوال التالية معرفة على  $\Omega$  فأي من هذه

الدوال هي دالة احتمالية.

$$(1) \quad C(A_1) = \frac{1}{3}, C(A_2) = \frac{1}{4}, C(A_3) = \frac{1}{5}, C(A_4) = \frac{1}{6}$$

$$(2) \quad C(A_1) = \frac{1}{3}, C(A_2) = \frac{1}{3}, C(A_3) = \frac{1}{3}, C(A_4) = \frac{1}{6}$$

$$(3) \quad C(A_1) = \frac{1}{4}, C(A_2) = \frac{1}{4}, C(A_3) = \frac{1}{2}, C(A_4) = \frac{1}{4}$$

ملاحظة: حتى تكون الدالة المعطاة دالة احتمالية يجب ان يكون مجموع احتمالات

عناصر الفضاء العيني .

الحل: (1)  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 = \Omega$

$$(1) \quad C(A_1) + C(A_2) + C(A_3) + C(A_4) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{20+15+12+10}{60} = \frac{57}{60} \neq 1$$

∴ الدالة ليست دالة احتمالية.

$$(2) \therefore {}_2C_2 = \frac{1}{3} \text{ ولا يجوز } \therefore \text{ح ليس دالة احتمال.}$$

$$(3) 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} = ({}_4^1)C + ({}_3^1)C + ({}_2^1)C + ({}_1^1)C$$

$$\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$$

$\therefore$  فالدالة  ${}_3C$  دالة احتمال.

مثال: اذا كان  $\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$  واذا كان ح دالة احتمالية معرفة على  $\Omega$  اوجد قيمة المجهول في كل مما يلي.

$$(1) {}_1C = ({}_1^1)C, \frac{1}{3} = ({}_2^1)C, \frac{1}{6} = ({}_3^1)C, \frac{1}{9} = ({}_4^1)C$$

$$(2) {}_1C = ({}_1^1)C, {}_2C = ({}_2^1)C, \frac{1}{4} = ({}_3^1)C, 2 = ({}_4^1)C \text{ اوجد } {}_3C, {}_2C, {}_1C$$

الحل: (1)  ${}_1C + ({}_2^1)C + ({}_3^1)C + ({}_4^1)C = 1$  لان الدالة ح احتمالية.

$$1 = ({}_1^1)C + \frac{1}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$$

$$1 = ({}_1^1)C + \frac{11}{18} \Leftrightarrow 1 = ({}_1^1)C + \frac{2+3+6}{18}$$

$$\therefore ({}_1^1)C = \frac{11}{18} - 1 = \frac{7}{18}$$

(2) اذا فرضنا ان ح  $({}_4^1)C$  سس فان ح  $({}_3^1)C = 2$  س وعليه فان

$${}_1C + ({}_2^1)C + ({}_3^1)C + ({}_4^1)C = 1 \text{ لان الدالة ح احتمالية}$$

$$1 = {}_1C + 2س + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$$

$$1 = {}_1C + 3س + \frac{2}{4}$$

$$3س = \frac{2}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore ({}_1^1)C = \frac{1}{6}, ({}_2^1)C = \frac{2}{3}$$

$$\therefore س = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

مثال: اذا كان لدينا ح (أ)  $\frac{1}{2}$ ، ح (ب)  $\frac{3}{8}$ ، ح (أ ∩ ب)  $\frac{1}{4}$

اوجد ما يلي:

$$(1) \text{ ح (أ ∪ ب) } (2) \text{ ح (}\bar{A}\text{) } (3) \text{ ح (}\bar{B}\text{) } (4) \text{ ح (}\bar{A} \cap \bar{B}\text{) } (5) \text{ ح (}\bar{A} \cup \bar{B}\text{) } (6) \text{ ح (}\bar{A} \cap B\text{) } (7) \text{ ح (}\bar{A} \cap \bar{B}\text{) }.$$

الحل: (1)  $\text{ح (أ ∪ ب) } = \text{ح (أ) } + \text{ح (ب) } - \text{ح (أ ∩ ب)}$

$$\frac{3}{8} = \frac{2-1+4}{8} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{1}{2} = \quad (2)$$

$$\frac{5}{8} = \frac{3}{8} - 1 = \text{ح (ب) } - 1 = \text{ح (}\bar{B}\text{) } \quad (3)$$

$$\frac{5}{8} = \frac{3}{8} - 1 = \text{ح (أ ∪ ب) } - 1 = \text{ح (}\bar{A} \cup \bar{B}\text{) } = \text{ح (}\bar{A} \cap \bar{B}\text{) } \quad (4)$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} - 1 = \text{ح (أ ∩ ب) } - 1 = \text{ح (}\bar{A} \cap B\text{) } = \text{ح (}\bar{A} \cup \bar{B}\text{) } \quad (5)$$

ملاحظة: القانونان اللذان ساعدتا في حل الجزء 4، 5 هما قانونان ديمورغات في

الاحتمالات وهما:

$$(1) \text{ ح (}\bar{A} \cup \bar{B}\text{) } = \text{ح (}\bar{A} \cap \bar{B}\text{) } \quad (1)$$

$$\text{ح (}\bar{A} \cap B\text{) } = \text{ح (}\bar{A} \cup \bar{B}\text{) } \quad (2)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \text{ح (أ ∩ ب) } - \text{ح (أ) } = \text{ح (}\bar{A} \cap B\text{) } \quad (6)$$

$$\frac{1}{8} = \frac{2}{8} - \frac{3}{8} = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} = \text{ح (أ ∩ ب) } - \text{ح (ب) } = \text{ح (}\bar{A} \cap B\text{) } \quad (7)$$

(3-10) الفضاء العيني المنتظم:

تعريف: اذا كان احتمال وقوع كل مفردة من مفردات الفضاء العيني متساو فاننا

نقول لهذا الفضاء العيني بالمنتظم.

فإذا كان أ حدث في  $\Omega$  فان احتمال أ يمكن إيجاده من العلاقة

$$P(A) = \frac{\text{عدد عناصر الحدث أ}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \quad (1-10) \dots\dots\dots$$

مثال: في تجربة القاء حجر نرد مرة واحدة ان احتمال ظهور كل عنصر من الفضاء

$$\text{العيني ح(1)-ح(2)-ح(3) -ح(4)-ح(5)-ح(6) = \frac{1}{6}.$$

وعليه فان هذا الاحتمال يسمى بالاحتمال المنتظم.

مثال: في تجربة سباق الخيول فان احتمال نجاح خيل مختلف عن الخيل الآخر وعليه

فان هذا النوع من الاحتمال يسمى بالاحتمال غير المنتظم.

مثال: كيس به خمسة كرات حمراء، 4 بيضاء، 3 زرقاء سحب من الكيس كرة

واحدة ما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

الحل: ليكن أ هو الحدث الذي يمثل ظهوره كرة بيضاء فان عدد الكرات البيضاء في

الكيس 4 وعدد الكرات جميعها 12.

$$\therefore P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

مثال: صندوق به 12 كرة مرقما من 1 الى 12 سحب من الصندوق كرة واحدة ما

احتمال ان تكون الكرة المسحوبة عليها رقم يقبل القسمة على 3.

الحل: ليكن الحدث هو أ وعليه فان

$$A = \{3, 6, 9, 12\}, \quad n(A) = 4, \quad n(\Omega) = 12. \therefore$$

$$P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

مثال: صندوق به 5 كرات حمراء، 3 كرات زرقاء، 4 كرات صفراء؟ ما احتمال ان

تكون الكرتان المسحوبتان حمراوان.



(3) سحبت اربعة كرات على التوالي دون ارجاع ما احتمال ان تكون اول كرتان مسحوبتان حمراوان والثالثة صفراء والرابعة زرقاء؟

(4) سحبت ثلاث كرات على التوالي مع الارجاع ما احتمال ان تكون الكرة الاولى حمراء والثانية صفراء والثالثة زرقاء؟

الحل: (1) ليكن الحدث المطلوب أ فان:

$$\frac{5}{33} = \frac{10}{66} = \frac{\frac{4 \times 5}{1 \times 2}}{\frac{11 \times 12}{1 \times 2}} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{(1)}{(6)} = \frac{1}{6}$$

(2) ليكن الحدث المطلوب ب فان

$$\frac{3}{22} = \frac{30}{220} = \frac{\frac{5}{1} \times \frac{3 \times 4}{1 \times 2}}{\frac{10 \times 11 \times 12}{1 \times 2 \times 3}} = \frac{\binom{5}{1} \binom{4}{2}}{\binom{12}{3}} = \frac{(1)(6)}{(220)} = \frac{6}{220} = \frac{3}{110}$$

(3) ليكن الحدث المطلوب هو ج فان ح(ج)

$$\frac{2}{99} = \frac{3}{9} \times \frac{4}{10} \times \frac{4}{11} \times \frac{5}{12} = \frac{(1)(4)(4)(5)}{(9)(10)(11)(12)} = \frac{80}{1188} = \frac{20}{297}$$

(4) ليكن الحدث المطلوب د فان ح(د)

$$\frac{5}{144} = \frac{3}{12} \times \frac{5}{12} \times \frac{4}{12} = \frac{(1)(5)(4)}{(12)(12)(12)} = \frac{20}{1728} = \frac{5}{432}$$

لان السحب مع الاعادة وعليه يبقى عدد الكرات الكلي=12 وعدد الكرات من كل لون ثابت.

مثال: صندوق به 15 مصباح خمسة منها تالفة سحبت من الصندوق ثلاث مصابيح معا اوجد الاحتمالات التالية.

(1) احتمال ان الثلاثة مصاييح سليمة.

(2) احد هذه المصاييح الثلاث تالف.

(3) احتمال احدها على الاقل تالف.

الحل: (1) عندما يكون عدد المصاييح التالفة خمسة مصاييح معنى ذلك ان عشرة فيها سليم ويراد سحب 3 مصاييح من بين خمسة عشر مصباح ويتم ذلك بعدد الطرق

$$\text{المختلفة} = \binom{15}{3} = \frac{13 \times 14 \times 15}{1 \times 2 \times 3} = 455 \text{ طريقة}$$

ويراد ان تكون الثلاثة مصاييح المسحوبة سليمة وبما ان عدد المصاييح السليمة 10 لذا

$$\text{يمكن اختيار ثلاثة منها بعدد من الطرق} = \binom{10}{3} = \frac{8 \times 9 \times 10}{1 \times 2 \times 3} = 120 \text{ طريقة مختلفة}$$

$$\text{وعليه فاذا كان الحدث المطلوب هو أ فان ح(أ)} = \frac{24}{455} = \frac{120}{91}$$

(2) ليكون الحدث ب هو الحدث المطلوب فان

$$\text{ح(ب)} = \frac{\binom{5}{1} \binom{10}{2}}{\binom{15}{3}} = \frac{\frac{5}{1} \times \frac{9 \times 10}{1 \times 2}}{\frac{13 \times 14 \times 15}{1 \times 2 \times 3}} = \frac{45}{455} = \frac{225}{91}$$

(3) ان احتمال الحصول على الاقل واحدة تالفة هو متمم للحدث الذي يمثل الحصول

على ثلاثة سليمة فاذا كان الحدث يمثل ج فان

$$\text{ح(ج)} = 1 - \text{ح(أ)} = 1 - \frac{120}{455}$$

$$= 1 - \frac{24}{91} = \frac{67}{91}$$

مثال: اذا كان لدينا عشر بطاقات مرقمة من 1 الى 10 بداخل صندوق خلطت

بشكل جيد اوجد ما يلي.

(1) اذا سحبت بطاقتان معا من الصندوق ما احتمال ان يكون مجموع الرقمين على البطاقتين عدد فردي.

(2) اذا سحبت بطاقتان على التوالي دون ارجاع البطاقة المسحوبة ما احتمال ان يكون مجموع الرقمين الظاهرين عددا فرديا.

(3) اذا سحبت بطاقتان على التوالي وكان السحب مع الارجاع ما احتمال ان يكون مجموع الرقمين الظاهرين على البطاقتين عددا فرديا.

(الحل: 1) ان سحب بطاقتين من بين عشرة بطاقات يتم بعدد من الطرق المختلفة

$$.45 = \frac{9 \times 10}{1 \times 2} = \binom{10}{2} = \text{عددها عدد الطرق}$$

اما بالنسبة لسحب بطاقتين بحيث يكون مجموعهما فردي يجب ان تكون البطاقة الاولى اما عدد زوجي والبطاقة الثانية فردية لان المجموع فردي أي عدد زوجي + عدد فردي = عدد فردي وهنا لدينا خمسة اعداد فردية وخمسة اعداد زوجية وهي على النحو التالي:

العدد الفردي	العدد الزوجي
1	2
3	4
5	6
7	8
9	10

ونستطيع تمثيل عدد الطرق المختلفة لسحب هذه البطاقات ليكون المجموع عدد فردي بالشجرة على النحو ومن خلال هذا التمثيل نلاحظ ان عدد الطرق المختلفة =  $5 \times 5 = 25$  طريقة

(1) فإذا كان الحدث يمثل أ فان

$$ح(أ) = \frac{25}{90} = \frac{5}{9}$$

(2) اذا كان الحدث المطلوب ب فان

$$ح(ب) = \frac{25+25}{90} = \frac{50}{90} = \frac{5}{9}$$

(3) اذا كان الحدث المطلوب هو جـ فان

$$ح(ج) = \frac{25+25}{100} = \frac{1}{2}$$

لان السحب مع الاعادة فان عدد الطرق المختلفة  $10 \times 10 = 100$

**مثال:** صف به 25 طالبا ذكور 15 اناثا رسب 9 طلاب، 6 طالبات في مادة الرياضيات اختير احد الطلبة بشكل عشوائي اوجد احتمال ان يكون الطالب المختار هو من الذكور او راسب في الرياضيات.

**الحل:** عدد عناصر الفضاء العيني  $\Omega = 25 + 15 = 40$

وليكن الحدث أ هو الممثل لان يكون الطالب المختار هو من الذكور فان  
 ن(أ) = 25 وان الحدث ب يمثل ان يكون الطالب المختار راسب في الرياضيات فان  
 ن(ب) = 9 + 6 + 15 وان الحدث أ ∩ ب هو ان يكون الطالب المختار هو من الذكور وراسب في الرياضيات وان ن(أ ∩ ب) = 9 وعليه فان

ح(أ) =  $\frac{25}{40}$ ، ح(ب) =  $\frac{15}{40}$ ، ح(أ ∩ ب) =  $\frac{9}{40}$  والمطلوب إيجاد ح(أ ∪ ب) لذا  
 نجد هذا الاحتمال من العلاقة ح(أ ∪ ب) = ح(أ) + ح(ب) - ح(أ ∩ ب)

$$= \frac{25}{40} + \frac{15}{40} - \frac{9}{40} = \frac{31}{40}$$

مثال : في تجربة القاء حجر نرد متمايزين في الهواء اوجد الاحتمالات التالية.

- (1) ظهور عددين متساويين على الوجهين العلويين.
- (2) ظهور المجموع 10 على الوجهين الظاهرين.
- (3) ظهور المجموع 13 على الوجهين الظاهرين.
- (4) ظهور عدد فردي على احد الوجهين الظاهرين فقط.
- (5) ظهور عدد اكبر من 4 على احد الوجهين الظاهرين.
- (6) ظهور مجموع 9 على الاقل على الوجهين الظاهرين.
- (7) ظهور مجموع 6 على الوجهين الظاهرين او عدد زوجي على كلا الوجهين الظاهرين.
- (8) ظهور مجموع فردي على الوجهين الظاهرين.

الحل: ان الفضاء العيني لهذه التجربة  $\Omega = \{(1,1), (2,1), \dots, (6,6)\}$

$$(1) \text{ أ- } \{(1,1), (2,2), (4,4), (5,5), (6,6)\} \Leftarrow \text{ح (أ)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

$$(2) \text{ ح (ب) } = \{(4,6), (6,4), (5,5)\} \Leftarrow \text{ح (ب)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$(3) \text{ ح (ب) } = \emptyset \Leftarrow \text{ح (ج) } = \text{صفر}.$$

$$(4) \text{ د- } \{(2,1), (4,1), (6,1), (1,2), (3,2), (5,2), (2,3), (4,3), (6,3), (1,4), (3,4), (5,4), (2,5), (4,5), (6,5), (1,6), (3,6), (5,6)\}.$$

$$\therefore \text{ح (د)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$(5) \text{ هـ- } \{(1,5), (5,1), (5,2), (2,5), (5,3), (3,5), (5,4), (4,5), (5,6), (6,5), (1,6), (6,1), (6,2), (2,6), (6,3), (3,6), (6,4), (4,6)\}$$

$$\text{ح (هـ)} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$6) - \{(3,6), (6,3), (6,4), (4,6), (6,6), (6,5), (5,6), (5,5), (4,5), (5,4)\} -$$

$$ح(ج) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

$$7) - \{(2,6), (6,2), (6,6), (4,4), (2,2), (3,3), (1,5), (5,1), (2,4), (4,2)\} -$$

$$\{(6,4), (4,6)\}$$

$$ح(ل) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$8) - \{(2,5), (5,2), (1,6), (6,1), (1,2), (2,1), (1,4), (4,1), (2,3), (3,2)\} -$$

$$\{(5,6), (6,5), (3,6), (6,3), (3,4), (4,3)\}$$

$$ح(ع) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

#### 10-4) الاحتمال الشرطي والاحداث المستقلة.

تعريف : ان احتمال حدث معين شرط وقوع حدث آخر ويرمز له بالرمز

.....(10-2)

$$ح(ا/ب) = \frac{ح(ا \cap ب)}{ح(ب)} \Leftrightarrow ح(ا \cap ب) = ح(ا/ب) \times ح(ب)$$

$$ح(ب/ا) = \frac{ح(ا \cap ب)}{ح(ا)} \Leftrightarrow ح(ا \cap ب) = ح(ب/ا) \times ح(ا)$$

وكذلك يمكن استنتاج ان الاحداث المتامة.

$$\frac{ح(ا \cup ب) - 1}{ح(ب) - 1} = \frac{ح(\overline{ا \cap ب})}{ح(ب)} = \frac{ح(\overline{ا} \cap \overline{ب})}{ح(\overline{ب})} = ح(\overline{ا} / \overline{ب})$$

$$\frac{ح(ا \cup ب) - 1}{ح(ا) - 1} = \frac{ح(\overline{ا \cap ب})}{ح(ا)} = \frac{ح(\overline{ا} \cap \overline{ب})}{ح(\overline{ا})} = ح(\overline{ب} / \overline{ا})$$

مثال: اذا كان  $P(A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(B) = \frac{1}{4}$ ,  $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$  وللطلب إيجاد ما يلي

- (1)  $P(A/B)$  (2)  $P(A/B)$  (3)  $P(A/\bar{B})$   
(4)  $P(\bar{A}/\bar{B})$  (5)  $P(A \cap B)$

الحل: (1) من العلاقة

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$\frac{1}{12} = \frac{6-3+4}{12} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} =$$

$$\therefore P(A/B) = \frac{1}{3} = \frac{12}{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} =$$

$$\therefore P(A/B) = \frac{1}{3} = \frac{12}{1} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{4} - 1} = \frac{P(A \cap B) - 1}{P(B) - 1} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = P(A/\bar{B}) \quad (3)$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} =$$

$$\frac{3}{4} = \frac{2}{3} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{3} - 1} = \frac{P(A \cap B) - 1}{P(B) - 1} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = P(A/\bar{B}) \quad (4)$$

$$5) \text{ح}(\bar{A} \cap \bar{B}) = \text{ح}(A) + \text{ح}(B) - \text{ح}(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12} - \frac{1-4}{12} = \frac{3}{12} - \frac{1}{4} = 0$$

نظرية: اذا كان  $A \cap B = \emptyset$  فان  $\text{ح}(A \cap B) = \text{ح}(A) + \text{ح}(B)$  - صفر وعليه فان  $\text{ح}(A/B) = \text{ح}(B)$  - صفر،  $\text{ح}(B/A) = \text{ح}(A)$  - صفر.

#### 5-10 الاحداث المستقلة:

تعريف: تكون الاحداث مستقلة اذا كان وقوعها بعضها البعض واذا كان  $A, B$  حدثان فحتى يكونا مستقلين فان.

$$1) \text{ح}(A \cap B) = \text{ح}(A) \cdot \text{ح}(B)$$

.....(10-3)

$$2) \text{ح}(A/B) = \text{ح}(A), \text{ح}(B/A) = \text{ح}(B)$$

ملاحظة: يجب التفريق بين الاحداث المستقلة والاحداث المنفصلة حيث ان الاحداث المستقلة تقاطعها ليس  $\emptyset$  بينما الاحداث المنفصلة فان تقاطعها تساوي  $\emptyset$ .

مثال: في تجربة القاء قطعتي نقود متميزتين اذا كان الحدث  $A$  يمثل ظهور الصورة على القطعة الاولى والحدث  $B$  يمثل ظهور صورة على الثانية فهل الحدثان  $A, B$  مستقلين؟

الحل: نكتب أولاً المجموعات على صيغة عناصر

$$A = \{ص ك, ص ص, ب\} - B = \{ك ص, ص ص\} - \text{وعليه فان}$$

$$A \cap B = \{ص ص\} - \text{ح}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \text{ح}(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$\text{ح}(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{ح}(A) \times \text{ح}(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = \text{ح}(A \cap B) \therefore \text{الحدثان } A, B \text{ مستقلين}$$



نتيجة:  $(\bar{A} \cap \bar{B})^c = (A \cup B)^c$

نظرية: اذا كان  $A_1, A_2$  حدثان من  $\Omega$  فان

$$(1) \quad (A_1 \cup A_2)^c = (\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)^c = \overline{(A_1 \cup A_2)^c}$$

$$(2) \quad (A_1 \cap A_2)^c = (\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2)^c = \overline{(A_1 \cap A_2)^c}$$

وهذان القانونان يفيدان في حل كثير من المسائل في الاحتمالات.

### 10-6) نظرية بيز:

نص النظرية: اذا كان  $A_1, A_2, \dots, A_n$  احداث في  $\Omega$  بحيث ان

$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n = \emptyset$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \Omega$$

كما هو موضح بالشكل وبرز حدث يشترك في جميع الاحداث الجزئية مثل ي فان احتمال حصول الحدث ي بمعلومية وقوع الحدث أ يكون على النحو التالي.

$$(10-4) \dots\dots\dots \frac{P(A_i | Y) \cdot P(Y)}{P(A_1 | Y) \cdot P(Y) + P(A_2 | Y) \cdot P(Y) + \dots + P(A_n | Y) \cdot P(Y)}$$

مثال: في مصنع للمسامير الالة رقم 1 30% من المسامير والالة رقم 2 40% والالة رقم 3=30% ونسب التالف هي ان الالة رقم 1 و 2 لالة رقم 4 والالة رقم 3 واخذت مما انتجه المصنع ووجد انه تالف ما احتمال انه لم يصنع بواسطة الالة رقم 3.

الحل: نضع ملخصاً للبيانات المعطاة:

$$L_1 = 0.30 - (A_1 | B) \quad C(A_1 | B) = 0.1$$

$$L_2 = 0.40 - (A_2 | B) \quad C(A_2 | B) = 0.2$$

$$ل(أ_3/ب) = 0.4 \quad ل(أ_3) = 0.30$$

$$\begin{aligned} \frac{ل(أ_3/ب) \times ل(أ_3)}{ل(أ_3/ب) \times ل(أ_3) + ل(أ_2/ب) \times ل(أ_2) + ل(أ_1/ب) \times ل(أ_1)} &= ل(ب/أ_3) \\ &= \frac{0.04 \times 0.3}{0.04 \times 0.30 + 0.02 \times 0.40 + 0.01 \times 0.30} = \\ &= \frac{0.012}{0.02 + 0.008 + 0.003} = \\ &= \frac{0.012}{0.023} = 0.52 \end{aligned}$$

$$ل(ب/أ) = 0.52 - 1 = 0.48$$

مثال: ينتج احد معامل الاحذية ما نسبته 60% والآخر 40% من الانتاج الكلي فاذا علم ان نسبة السليم من الانتاج الاول = 90% والثاني 80% .

(1) المطلوب إيجاد احتمال سحب وحدة انتاج عشوائية خالية من العيوب.

(2) اذا سحبت وحدة انتاج عشوائية وتبين انها خالية من العيوب ما احتمال ان تكون من المعمل الاول.

$$ل(أ_1) = 0.60, ل(أ_2) = 0.40$$

$$ل(ب/أ_1) = 0.90, ل(ب/أ_2) = 0.80$$

$$(1) ل(ب/أ) = ل(أ_1/ب) \times ل(أ_1) + ل(أ_2/ب) \times ل(أ_2)$$

$$= 0.60 \times 0.90 + 0.40 \times 0.80 = 0.54 + 0.32 = 0.86$$

$$(2) ل(أ_1/ب) = \frac{ل(أ_1) \times ل(ب/أ_1)}{ل(ب)} = \frac{0.60 \times 0.90}{0.86} = \frac{0.54}{0.86}$$

## تمارين عامة على الاحتمالات

س1: من الشكل جانبيا وبلاستفادة من البيانات التالية:

$$ح(أ_1) - ح(أ_2) - ح(أ_3) = \frac{1}{4}$$

$$ح(أ_4) - ح(أ_5) - ح(أ_6) = \frac{1}{8}$$

$$ح(أ_7) - ح(أ_8) = \frac{1}{16}$$

والمطلوب إيجاد ما يلي:

- |                                    |                                   |                                   |
|------------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| (1) $ح(أ_1)$                       | (2) $ح(\bar{A})$                  | (3) $ح(أ_3)$                      |
| (4) $ح(أ \cap ب)$                  | (5) $ح(أ_1 \cap أ_2)$             | (6) $ح(أ_1 \cap أ_2)$             |
| (7) $ح(أ_1 \cap أ_2)$              | (8) $ح(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$ | (9) $ح(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$ |
| (10) $ح(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$ |                                   |                                   |

س2: على فرض ان  $ح(أ_1) = 0.3$  ،  $ح(أ_2) = 0.5$  ،  $ح(أ_1 \cap أ_2) = 0.7$  اوجد ما يلي:-

- |                                   |                                   |                    |
|-----------------------------------|-----------------------------------|--------------------|
| (1) $ح(أ_1 \cap أ_2)$             | (2) $ح(\bar{A}_1)$                | (3) $ح(\bar{A}_2)$ |
| (4) $ح(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$ | (5) $ح(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$ |                    |
| (6) $ح(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$ | (7) $ح(أ_1 \cap أ_2)$             |                    |

س3: في تجربة القاء حجر النرد مرة واحدة اذا كانت الاحداث التالية:-

$A_1 = \{1, 6\}$  ،  $A_2 = \{1, 3, 5\}$  اوجد ما يلي:

- |                       |                       |              |
|-----------------------|-----------------------|--------------|
| (1) $ح(أ_1 \cap أ_2)$ | (2) $ح(أ_1 \cap أ_2)$ | (3) $ح(أ_1)$ |
|-----------------------|-----------------------|--------------|

$$\begin{array}{lll} (4) \text{ح}(\bar{2}) & (5) \text{ح}(2/1) & (6) \text{ح}(1/2) \\ (7) \text{ح}(\bar{2}/\bar{1}) & (8) \text{ح}(1/1) & (9) \text{ح}(\bar{2} \cap \bar{1}) \\ (10) \text{ح}(\overline{2 \cap 1}) & (11) \text{هل الحدثان مستقلين} & \end{array}$$

مس 4: في تجربة القاء قطعة نقود منتظمة ثم حجر نر منتظم مرة واحدة اوجد الاحتمالات التالية:-

- 1- الحدث الذي يمثل ظهور كتابة على الوجه العلوي لقطعة النقود.
- 2- الحدث الذي يمثل ظهور العدد 3 على الوجه العلوي لحجر النرد.
- 3- الحدث الذي يمثل عدم ظهور العدد 3 على الوجه العلوي لحجر النرد.
- 4- الحدث الذي يمثل ظهور صورة على الوجه العلوي لقطعة نقود وعدد اقل من 3 على حجر النرد.
- 5- الحدث الذي يمثل ظهور كتابة على الوجه العلوي لقطعة نقود والعدد 4 او 6 على الوجه العلوي لحجر النرد.

مس 5: ليكن ف-  $\{أ_1, أ_2, أ_3, أ_4, أ_5, أ_6, أ_7\}$  ولتكن احتمالات الاحداث البسيطة معينة كما يلي:  $\text{ح}(أ_1) - \text{ح}(أ_2) - \text{ح}(أ_6)$

$$\text{ح}(أ_3) - 2\text{ح}(أ_2) - \frac{1}{2}\text{ح}(أ_1)$$

$$\text{ح}(أ_5) - \frac{1}{2}\text{ح}(أ_7) - \frac{1}{2}\text{ح}(أ_1)$$

$$\text{اوجد ح}(أ_1), \text{ح}(أ_2), \text{ح}(أ_3), \text{ح}(أ_4), \text{ح}(أ_5), \text{ح}(أ_6), \text{ح}(أ_7)$$

مس 6: اذا كانت  $أ_1, أ_2, أ_3$  ثلاثة احداث معينة لقضاء عيني وكانت احتمالات

$$\text{الوحدات كما يلي : } \text{ح}(أ_1) - 2\text{ح}(أ_2), \text{ح}(أ_3) - \frac{1}{2}\text{ح}(أ_1) \text{ اوجد}$$

$$ح(أ_1)، ح(أ_2)، ح(أ_3)، ل(ح \cap أ_1)، ل(أ_1 \cap أ_2)، ل(أ_1 \cap أ_3)$$

س 7: سحبت كرة عشوائيا من صندوق به 3 كرات بيضاء، 6 كرات حمراء، 8

زرقاء، 9 خضراء اوجد الاحتمالات التالية:-

1- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة بيضاء.

2- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة خضراء.

3- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة زرقاء.

4- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة حمراء.

5- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة اما حمراء او خضراء.

6- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة اما بيضاء او خضراء.

7- احتمال ان تكون الكرة المسحوبة ليست خضراء او ليست بيضاء.

س 8: كيس به ثلاث كرات بيضاء، 2 صفراء، 4 حمراء، 5 زرقاء، سحبت منه

كرتان عشوائيا احسب الاحتمالات التالية:-

1- كلا الكرتان زرقاوان

2- واحدة بالضبط زرقاء

3- على الاقل واحدة زرقاء.

س 9: اذا كان  $A_1, A_2$  حدثان معينان وكان  $ح(A_1 \cap A_2) = \frac{5}{8}$

$ح(A_1) = \frac{1}{2}, ح(A_2) = \frac{1}{3}$  احسب الاحتمالات التالية:

(1)  $ح(\overline{A_1} \cap A_2)$  (2)  $ل(A_2)$  (3)  $ل(\overline{A_2})$

(4)  $ل(A_1 \cap A_2)$  (5)  $ل(\overline{A_1 \cap A_2})$  (6)  $ل(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$

# 3

## الاحتمالات Probabilities

Factorial N

10- حساب المضروب

النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب المضروب (N!) للعدد N، حيث N عدد صحيح موجب، باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$N! = N.(N-1)....3.2.1$$

خوارزمية الحل

- 1- مئة العدد (N) المطلوب حساب المضروب له.
  - 2- تأكد من ان (N) اكبر من أو يساوي صفر.
  - 3- احسب المضروب (F1) للعدد (N) كما يلي.
- (أ) إذا كان (N) يساوي صفرًا، فإن المضروب = 1 بموجب التعريف.
- (ب) احسب المقدار  $(N \times \dots \times 3 \times 2 \times 1)$  وذلك بضرب العدد 1 في العنصر الاول (N2) من عناصر التعبير؛ ثم استخدم نتيجة العملية على اساس انها المضروب فيه multiplier للعنصر الثاني (N2) من عناصر

التعبير. كمر عملية ضرب النواتج الوسيطة (P) بالعدد اللاحق (N2) في التعبير إلى أن يكون العدد اللاحق (N2) في التعبير أكبر من العدد (N) المطلوب حساب المضروب له.

(ج) ستكون القيمة النهائية للنتائج الوسيطة (P) هي قيمة المضروب (F1) للعدد (N).

4- اطبع النتيجة

5- توقف وأنه البرنامج.

البرنامج المستخدم

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE FACTORIAL OF A NUMBER**
020 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (N)**
030     INPUT N
040 REM ** 2. CHECK (N) TO ENSURE THAT IT IS ZERO OR GREATER **
050     IF N<0 THEN END
060 REM ** 3. COMPUTE THE FACTORIAL (F1) OF THE NUMBER (N)**
070 REM ** 3(A): IF (N) EQUALS 1, THEN THE FACTORIAL IS 1 **
080 REM ** IF (N) DOES NOT EQUAL 0, THEN CONTINUE TO COMPUTE (F1)**
090     IF N<>0 THEN GOTO 160
100 REM ** NOW AT THIS POINT, (N) EQUALS ZERO, THEN (F1)=1**
110     F1 =1
120 REM ** PRINT THE RESULT OF (F1)**
130     GOTO 300
140 REM ** 3(B): COMPUTE THE EXPRESSION (1)(2)(3)...(N)**
160     F=1
170 REM ** RESET THE NEXT NUMBER (N2) TO ZERO **
180     N2 = 0
190 REM ** ADD 1 TO THE NEXT NUMBER (N2) TO GET THE NEXT VALUE**
200     N2=N2+1
210 REM ** CHECK (N2); IF IT IS GREATER THAN N THEN THE**

```

```

220 REM ** EVALUATION IS COMPLETED; OTHERWISE CONTINUE**
230     IF N2 > N THEN GOTO 280
240 REM ** MULTIPLY THE CURRENT VALUE OF(P) BY THEN NEXT (N2)**
250     P2=P2*N2
260     GOTO 200
270 REM ** 3(C):AT THIS POINT,VALUE OF P = THE FACTORIAL (F1)**
280     F1=P
290 REM ** 4. PRINT THE FACTORIAL (F1)**
300     PRINT THE VALUE OF 'N: FACTORIAL IS 'F1
310 REM ** 5. END THE PROGRAM**
320     END
    
```

مثال : احسب المضروب للعدد 8 (8!).

الحل: أدخل البيانات على الصور التالية:

8

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE VALUE OF 8 FACTORIAL IS 40320

مثال : احسب المضروب للعدد 0 (0!).

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية:

0

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE VALUE OF 0 FACTORIAL IS 1



Permutation

2-10 حساب التباديل

النص الرياضي للمسألة

اكتب برنامجاً لحساب عدد التباديل (P) لمجموعة من الاشياء المنفصلة عددها (n) التي يمكن أن نأخذها مجموعة فرعية من هذه المجموعة عددها (r) في كل مرة، باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

خوارزمية الحل

- 1- عين القيم (n) و (r).
- 2- تأكد من أن كلا من (n) و (r) أكبر من صفر.
- 3- تأكد من أن قيمة (r) ليست أكبر من قيمة (n).
- 4- عين المضروب (F1) للعدد n.
- 5- عين المضروب (F2) للقيمة (n-r).
- 6- احسب عدد التباديل (P1) وذلك بقسمة (F1) على (F2).
- 7- اطبع النتيجة
- 8- توقف وأنه البرنامج.

البرنامج المستعمل

```
010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE PERMUTATIONS**
020 REM ** OF N THINGS TAKEN R AT A TIME**
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBERS N & R**
040   INPUT N, R
050 REM ** 2. CHECK THAT N & R ARE GREATER THAN ZERO**
060   IF N<1 THEN END
070   IF R<1 THEN END
```

```

080 REM ** 3. CHECK THAT R IS NOT GRATER THAN N**
090   IF R>N THEN END
100 REM ** 4. COMPUTE THE FACTORIAL (F1) OF N.**
110 REM ** RESET THE INTERMEDIATE PRODUCT ACCUMULATOR (P2) TO 1 **
120   P2 = 1
130 REM ** RESET THE NEXT NUMBER (N1) TO ZERO INITIALLY **
140   N1 = 0
150 REM ** ADD 1 TO THE NEXT NUMBER N1 TO OBTAIN THE NEXT VALUE**
160   N1 = N1 + 1
170 REM ** CHECK N1;IF IT IS GREATER THAN N,THINE THE EVALUATION**
180 REM ** OF FACTORIAL F1 IS COMPLETE;OTHERWISE CONTINUE**
190   IF N1>N THEN GOTO 250
200 REM ** MULTIPLY THE CURRENT VALUE F (P2) BY THE NEXT (N1) **
210   P2 = P2 * N1
220 REM ** GO BACK TO THE INSTRUCTION THAT PRODUCES THE NEXT (N1) **
230   GOTO 160
240 REM ** AT THIS STAGE,VALUE OF P2 EQUALS THE FACTORIAL (F1)**
250   F1 = P2
260 REM ** 5. COMPUTE THE FACTORIAL OF (N-R)**
270 REM ** COMPUTE THE QUANTITY (N-R)**
280   N2 = N-R
290 REM ** COMPUTE THE FACTORIAL OF N2 AND STORE IT IN (P2)**
300   P2 = 1
310   N1 = 0
320   N1 = N1 + 1
330   IF N1>N2 THEN GOTO 360
340   P2 = P2 * N1
350   GOTO 320
360   F2 = P2
370 REM ** 6. COMPUTE THE NUMBER OF PERMUTATIONS (P1) **
380   P1 = F1/F2
390 REM ** 7. PRINT THE NUMBER OF PERMUTATIONS (P1) **
400   PRINT N:'THINGS':R:'AT A TIME GIVES':P1:'PERMUTATIONS'
410 REM ** 8.END THE PROGRAM **
420   END

```

**مثال** ما هو عدد التباديل الناتجة من ترتيب أربعة ألوان من مجموع ستة ألوان.  
**الحل:** أدخل البيانات على الصيغة التالية :

6, 4

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

6 THINGS 4 AT A TIME GIVES 360 PERMUTATIONS

**مثال** ما هو عدد التباديل الناتجة من ترتيب خمسة أحرف من مجموع السبعة أحرف أ، ب، ج، د، هـ، و، ز  
**الحل:** أدخل البيانات على الصورة التالية:

7, 5

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

7 THINGS 5 AT A TIME GIVES 2520 PERMUTATIONS



**النص الرياضي للمسألة**

اكتب برنامجاً لحساب عدد التوافيق (C) لمجموعة من الأشياء المنفصلة عددها (n) التي يمكن أن نأخذها مجموعة فرعية من هذه المجموعة عددها (r) في كل مرة، باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

## خوارزمية الحل

- 1- عين القيم  $(n)$  و  $(r)$ .
- 2- تلكد من أن كلًا من  $(n)$  و  $(r)$  اكبر من صفر.
- 3- تلكد من أن قيمة  $(r)$  ليست اكبر من قيمة  $(n)$ .
- 4- عين المضروب  $(F1)$  للعدد  $(n)$ .
- 5- عين المضروب  $(F2)$  للقيمة  $(n-r)$ .
- 6- عين المضروب  $(F3)$  للعدد  $(r)$ .
- 7- احسب عدد التوافيق  $(C)$  وذلك بقسمة  $(F1)$  على حاصل ضرب  $(F2)$  و  $(F3)$ .
- 8- اطبع النتيجة.
- 9- توقف وأنت البرنامج.

## البرنامج المستخدم

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE NUMBER OF COMBINATIONS**
020 REM ** OF N THINGS TAKEN R AT A TIME **
030 REM ** 1. ENTER THE NUMBERS N & R **
040     INPUT N, R
050 REM ** 2. CHECK IF N & R ARE GREATER THAN ZERO **
060     IF N<1 THEN END
070     IF R<1 THEN END
080 REM ** 3. CHECK IF R IS NOT GREATER THAN N **
090     IF R>N THEN END
100 REM **4 COMPUTE THE FACTORIAL (F1) OF(N) **
110 REM ** RESET THE INTERMEDIATE PRODUCT ACCUMULATOR (P2) TO 1 **
120     P2 = 1
130 REM ** RESET THE NEXT NUMBER (N2) TO ZERO INITIALLY **
140     N2=0
150 REM ** ADD 1 TO THE NEXT NUMBER (N1) TO OBTAIN THE NEXT VALUE

```

```

160      N2=N2+1
170 REM ** CHECK N2:IF IT IS GREATER THAN N,THEN THE EVALUATION **
180 REM ** OF FACTORIAL IS COMPLETE; OTHER WISE CONTINUE **
190      IF N2>N THEN GOTO 250
200 REM ** MULTIPLY THE CURRENT VALUE OF (P2) BY THE NEXT (N2) **
210      P2 = P2 * N2
220 REM ** GO BACK TO THE INSTRUCTION THAT PRODUCES NEXT (N2) **
230      GOTO 160
240 REM ** AT THIS STAGE THE VALUE OF (P2) EQUALS THE FACTORIAL (F1) **
250      F1 = P
260 REM ** 5. COMPUTE THE FACTORIAL OF (N-R) **
270 REM ** COMPUTE THE QUANTITY (N-R) AND PUT IT IN (L) **
280      L=N-R
290 REM ** COMPUTE THE FACTORIAL OF (L) **
300      P=1.
310      N2=0
320      N2 = N2 + 1
330      IF N2>L THEN GOTO 350
340      P=P * N2
350      F2 = P
370 REM ** 6 COMPUTE THE FACTORIAL OF(R) AND PUT THE RESULT IN (F3) **
380      P = 1
390      N2 = 0
400      N2 = N2 + 1
410      IF N2>R THEN GOTO 440
420      P=P * N2
430      GOTO 400
440      F3=P
450 REM ** 7. COMPUTE THE NUMBER OF COMBINATIONS (C) **
460      C=F1/(F2 * F3)
470 REM ** 8.PRINT THE NUMBER OF COMBINATIONS (C) **
480      PRINTN:'THINGS':R:'AT A TIME GIVES':C:'COMBINATIONS'.
490 REM ** END THE PROGRAM **
500      END

```

**مثال** احسب عدد الطرق التي يمكن بها اختيار لجنة من أربعة اشخاص من خلال مجموعة مكونة من اثني عشر شخصاً.

**الحل:** أدخل البيانات على الصورة التالية:

12, 4

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

12 THINGS 4 AT A TIME GIVES 495 COMBINATIONS.

**مثال** كم عدد الكلمات المكونة من ثلاثة حروف التي يمكن تشكيلها من الحروف أ، ب، ج، د، هـ؟

**الحل:** أدخل البيانات على الصورة التالية :

5, 3

وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

5 THINGS 3 AT A TIME GIVES 120 COMBINATIONS



**النص الرياضي للمصالة**

اكتب برنامجاً لحساب التوقع الرياضي لاحد المتغيرات العشوائية (x) الذي تصاحبه الوظيفة الاحتمالية كما هو مبين فيما يلي:

$f(x_1)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	.....	$f(x_2)$
$x_1$	$x_1$	$x_2$	.....	$x_2$

حيث  $f(x_i)$  تمثل احتمالية حدوث أية قيمة للمتغير العشوائي، (n) يمثل عدد أزواج النتائج،  $(x_i)$  يمثل النتيجة أو القيم الممكنة للمتغير العشوائي: احسب التوقع الرياضي باستخدام الصيغة الرياضية التالية:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i f(x_i)$$

### خوارزمية الحل

- 1- عين العدد (N) الذي يمثل أزواج النتائج والاحتمالات المصاحبة لها (P, O) على الترتيب.
- 2- تأكد من أن العدد (N) يساوي 1 أو أكبر.
- 3- احسب القيمة المتوقعة للحدث (E) كما يأتي:
  - (أ) احسب القيمة المتوقعة expected value لكل نتيجة على انفراد (V)، وذلك بضرب النتيجة (O) في الاحتمال المصاحب لها (P).
  - (ب) اجمع النتائج المتوقعة لكل نتيجة على انفراد (V).
- 4- قرب النتيجة الى ثلاث مراتب عشرية
- 5- اطبع النتيجة
- 6- توقف وإنه البرنامج

### البرنامج المستخدم

```

010 REM ** THIS PROGRAM COMPUTES THE EXPECTED VALUE OF AN EVENT **
020 REM ** 1. ENTER THE NUMBER (N) OF OUTCOME PAIRS **
030     INPUT N
040 REM ** 2.CHECK N; IF IT IS LESS THAN 1 THEN END THE PROGRAM **
050     IF N<1 THEN END
060 REM ** 3. COMPUTE THE EXPECTED VALUE (E) **
070 REM ** RESET THE ACCUMULATOR (E) TO ZERO INITIALLY **
080     E = 0.0
090 REM ** RESET THE COUNTER (J) TO ZERO **
    
```

```

100   J=0
110 REM ** ENTER NEXT PAIR OF OUTCOMES (O) & PROBABILITY (P)
120   INPUT O,P
130 REM ** 3 (A): COMPUTE THE EXPECTED VALUE (V) **
140   V=O * P
150 REM ** 3(B): COMPUTE THE EXPECTED VALUES (V) BY ADDING THE **
160 REM ** CURRENT VALUE (V) TO THE ACCUMULATOR (E) **
170   E=E+V
180 REM ** ADD 1 TO THE COUNTER (V) TO SHOW THAT A NEW VALUE **
190 REM ** HAS BEEN ADDED **
200   J=J+1
210 REM ** CHECK IF ALL PAIRS OF OUTCOMES AND ASSOCIATED
220 REM ** PROBABILITY (O, P) HAVE NOT BEEN ADDED THEN **
230 REM ** GO BACK TO GET ANOTHER OTHERWISE CONTINUE **
240   IF J<=N THEN GOTO 120
250 REM ** 4. ROUND THE RESULTING VALUE TO THE NERREST THIRD **
260 REM ** DECIMAL PLACES**
270   E= INT (E*1000 + 0.5)/1000
280 REM ** 5. PRINT THE EXPECTATION VALUE (E) **
290   PRINT "THE EXPECTED VALUE OF THE EVENT IS:E"
300 REM ** 6.END THE PROGRAM **
310   END

```

مثال  
يبلغ عدد حوادث السيارات في احدى المدن في أي يوم 5, 4, 3, 2, 1  
باحتمالية مناظرة قدرها 0.01, 0.02, 0.06, 0.17, 0.32, 0.35  
على التوالي. ما هو عدد الحوادث المتوقعة في أي يوم؟

الحل: أدخل البيانات على الصورة التالية

```

6
0, 0.35
1, 0.32
2, 0.17
3, 0.06
4, 0.02
5, 0.01

```



وسوف يظهر الجواب على الصورة التالية:

THE EXPECTED VALUE OF THE EVENT IS 0.97

نماذج

- 1- احسب 5!
- 2- احسب عدد الكلمات المكونة من ثلاثة حروف التي يمكن تركيبها من حروف كلمة JIHAD.
- 3- احسب عدد الطرق التي يمكن بها قراءة ثلاثة من كتب الحديث من مجموع كتب الصالح الستة.
- 4- افرض ان القيمة المتوقعة لاية دالة (J) يمكن حسابها كما يلي:

$$E(J) = \sum_{i=1}^n f(x_i) H(x_i)$$

اكتب برنامجاً لحساب ما يأتي:

(أ)  $E(X^2)$

(ب)  $E(2X + 1)$

(ج)  $E(3X^2 - 3)$

أخذاً بنظر الاعتبار ان دالة الاحتمالات هي

$f(x_i)$	0.2	0.4	0.3	0.1
$X=x_i$	0	1	2	3

## المراجع

- مقدمة في الأساليب الاحصائية، د. شفيق العتوم، 1992.
- أسس علم الاحصاء، عزام صيري وعلي أبو شرار، 1991.
- علم الاحصاء نظريات وتطبيقات، عزام صيري وعلي أبو شرار، 1990.
- مبادئ الاحصاء للمهن التجارية، كامل فليفل وفتحى حمدان، 1995.



# علم الإحصاء الوصفي المبرمج

## سلسلة الحاسبات الإلكترونية

لأستاذ الدكتور موسى منصور

الكتاب	عنوان الكتاب	الكتاب	عنوان الكتاب
1	برمجة الحاسبات الإلكترونية بلغة فورتران 4	28	بيسك المرئية مع النوافذ
2	فورتران 77 مع تطبيقات عملية وهنسية	29	لوتس 3.1
3	برمجة الحاسبات الإلكترونية بلغة بيسك	30	تيربوسي مع تطبيقات علمية
4	برمجة الحاسبات الإلكترونية بلغة كوبول	31	علم نمسك أوتوكاد 11
5	تحليل نظم المعلومات باستخدام الكمبيوتر	32	سي ++ مع تطبيقات علمية
6	برمجة باسكال لطلبة الهندسة والعلوم	33	لوتس مع النوافذ
7	الرجع الشامل في برمجة بيسك	34	بي سي تراز 7.1
8	مقدمة في علم الحاسب الإلكتروني	35	المرجع السريع في قاعدة البيانات 4
9	برمجة بيسك للناشئين	36	اكسل 4
10	الحاسبات الشخصية وأتمة المكاتب	37	كواترو برو 5 مع النوافذ
11	التحليل الإحصائي المبرمج بلغة بيسك	38	فورتران 90
12	التحليل الإحصائي المبرمج بلغة فورتران	39	النوافذ 3.1 / خفايا وأسرار
13	طرق التحليل العددي المبرمج بلغة بيسك	40	ويرد برفكت مع النوافذ
14	طرق التحليل العددي المبرمج بلغة فورتران	41	سلسلة كمبيوتر الأطفال
15	الرجع الشامل في برمجة سي	42	تركيب البيانات
16	نورتن مع النوافذ	43	مايكرو سوفت ويرد 2 مع النوافذ
17	بحوث العمليات المبرمجة بالكمبيوتر	44	يونيكس: نظام تشغيل المستقبل
18	الرجع الشامل في كويك بيسك	45	إم. إس. دوس 6.0
19	برمجة لغة التجميع على أجهزة إي.بي. إم	46	إم. إس. دوس 6.2
20	البرمجة بلغة لوجو	47	نظام نوافذ NT
21	مجموعة البرامج الجاهزة	48	فوكس برو مع النوافذ
22	رياضيات البرمجة	49	فوكس برو، مشكلات وحلول
23	إم. إس. دوس 5.0	50	شبكة إنترنت
24	الرجع الشامل في قاعدة البيانات + III	51	البريد الإلكتروني مع النوافذ
25	الرجع الشامل في النوافذ 3.1	52	AUTOCAD 12 for windows
26	إكسل 5.0 مع النوافذ	53	للمدخل إلى النوافذ 95
27	ويرد بيرفكت 5.1	54	الرجع الشامل في ويرد 6 العربي

كافة المطبوعات والنشر والنوافذ



مجمع الفحوص التجاري - هاتف وفاكس ٩١٢١٩٠

ص. ب ٩٢٢٧٦٢ - عمان ١١٢١ - الأردن